Chapitre 1 : Polynômes -07-09-11-
Terminale ES 2, 2011-2012, Y. Angeli

1. Rappels sur les fonctions

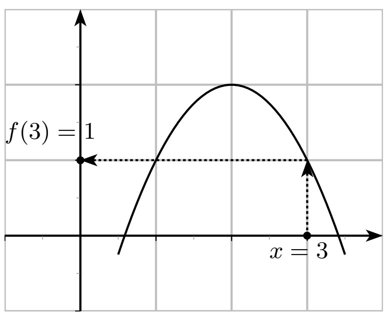
• Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ un ensemble de nombres réels. Lorsque à chaque nombre réel $x \in \mathcal{D}$ on fait correspondre un nombre réel $f(x)$, on définit une *fonction* f.
• L'ensemble $\mathcal{D}$ est l'*ensemble de définition* de la fonction f.
• Le nombre $f(x)$ est l'*image* du nombre $x \in \mathcal{D}$ par la fonction f
• Soit $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions x de $f(x) = a$ est l'ensemble des *antécédents* de a.
• Dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in \mathcal{D}$ et $y = f(x)$ est la *courbe représentative* $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.

⚠ Ne pas confondre les notations f (une fonction), $f(x)$ (un nombre) et $\mathcal{C}_f$ (une courbe).

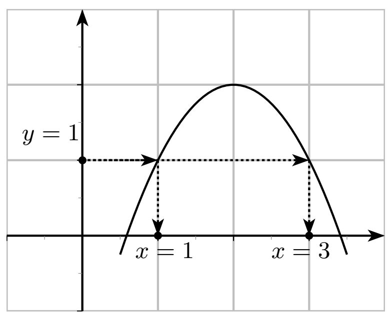
Lecture graphique

On a représenté la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $[-0,5\ ;\ 2,5]$:

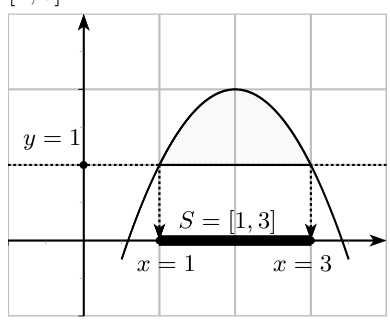
L'image de 3 par f est $f(3) = 1$.



Les antécédents de 1 par f sont : $x = 1$ et $x = 3$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 1$ est l'intervalle $[1, 3]$.



Par le calcul

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -2x + 1$.
• Pour calculer l'image de 3 par g, il suffit de remplacer la variable x par 3 dans l'expression de g : $g(3) = -2 \times 3 + 1 = -5$.
• Pour déterminer l'ensemble des antécédents de 3 par g, il suffit de résoudre $g(x) = 3 \Leftrightarrow 3 = -2x + 1 \Leftrightarrow 3 - 1 = -2x \Leftrightarrow \frac{2}{-2} = x \Leftrightarrow x = -1$.
Donc l'ensemble des antécédents de 3 par g est $\{-1\}$.

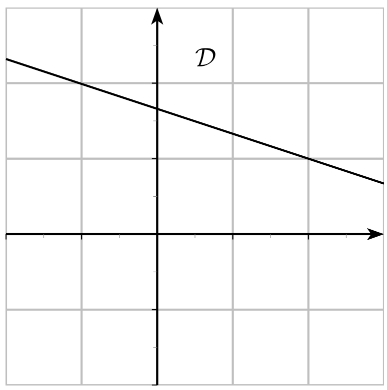
2. Fonctions affines

Une *fonction affine* est une fonction de la forme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont fixés. Le nombre a est le *coefficient directeur* de f, le nombre b son *ordonnée à l'origine.*
$\star$ La courbe représentative d'une fonction affine est une *droite affine.*
$\star$ Si $a > 0$, la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\star$ Si $a = 0$, la fonction est constante sur $\mathbb{R}$ (elle prend toujours la valeur b)
$\star$ Si $a < 0$, la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Méthode. *Lire l'équation réduite d'une droite.*
Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont deux points distincts d'une droite affine $\mathcal{D}$, le coefficient directeur de la fonction associée est $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
L'ordonnée à l'origine b s'obtient en remplaçant a, x_A, y_A dans $y_A = ax_A + b$ et en resolvant.

Méthode. *Tracer une droite d'équation donnée.*
Pour tracer une droite d'équation $y = ax + b$, on choisit deux abscisses $x_A \neq y_B$ distinctes, et on calcule l'ordonnée des points de la droite correspondants : $y_A = ax_A + b$ et $y_B = ax_B + b$. Il ne reste plus qu'à placer les points $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et tracer la droite (AB).

Exemple. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$.



. . . .
. . . .
. . . .
Donc $\mathcal{D}$ a pour équation : $y =$ . . . .
Soit $\mathcal{D}'$ d'équation $y = \frac{3}{2}x - 1$. Représenter $\mathcal{D}'$.

x		
y		

Signe d'une fonction affine (avec $a \neq 0$)

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		signe de $-a$	0	signe de a	

3. Trinômes

Un *trinôme du second degré à coefficients réels* est une fonction de la forme $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont fixés et $a \neq 0$. Les *racines* d'un trinôme P sont les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

$\star$ La courbe représentative d'un trinôme est une *parabole*.

$\star$ Si $a > 0$, la parabole est orientée vers le haut.

$\star$ Si $a < 0$ la parabole est orientée vers le bas.

$\star$ Le *discriminant* du trinôme P est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

– si $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines : $S = \left\{ \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} ; \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$.

– si $\Delta = 0$, le trinôme a une racine : $S = \left\{ \dfrac{-b}{2a} \right\}$.

– si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racine : $S = \varnothing$.

Exemples.

Résoudre $x^2 + 4x + 5 = 0$..

....

....

Résoudre $x^2 - x + 0,25 = 0$ ....

....

....

Résoudre $x^2 + 5x + 4 = 0$..

....

....

Signe d'un trinôme

Soit $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

• $\Delta > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

• $\Delta = 0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

• $\Delta < 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

Exemple. Résoudre $-x^2 + 3x - 2 > 0$.

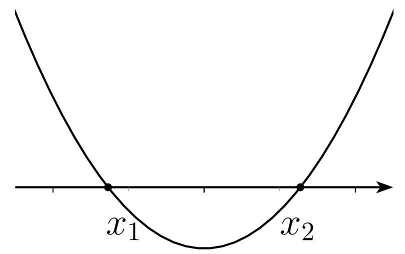
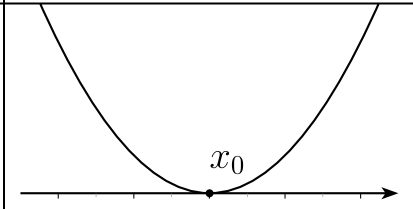
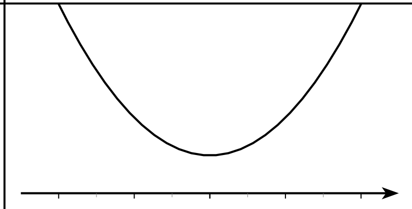
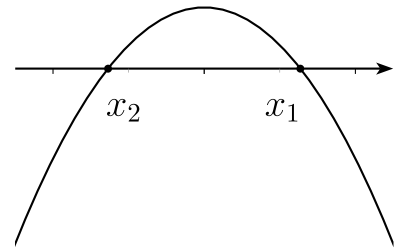
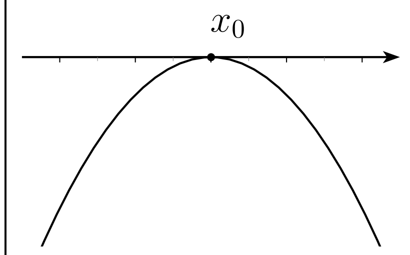
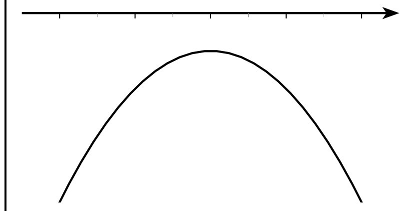
4. Polynômes

Définition. Une fonction *polynôme* à coefficients réels est une fonction définie sur l'ensemble des réels de la forme $P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ où n est un entier naturel et $a_0, ..., a_n$ sont des réels. Les fonctions affines et les trinômes sont des polynômes particuliers.

Comme pour les autres fonctions, on obtient le sens de variation d'un polynôme P en étudiant le signe de sa dérivée P'. On utilisera les règles suivantes :
⋆ La dérivée d'une fonction constante $x \mapsto k$ est nulle.
⋆ La dérivée de la fonction $x \mapsto x$ est la fonction $x \mapsto 1$.
⋆ La dérivée de la fonction $x \mapsto x^2$ est la fonction $x \mapsto 2x$.
⋆ La dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ est la fonction $x \mapsto nx^{n-1}$. (n entier naturel).
⋆ $(k \times u)' = k \times u'$ où $k \in \mathbb{R}$ et u est une fonction dérivable.
⋆ $(u + v)' = u' + v'$ où u et v sont des fonctions dérivables.

Exemple. Dresser le tableau de variations des fonctions $f : x \mapsto x^2 + \frac{x}{2} + 7$ et $g : x \mapsto x^3 - 9x^2 + 15x + 2$.

Polynôme de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$:

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$	Variations
$a > 0$				$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & \frac{-b}{2a} & & +\infty \\ \hline & +\infty & & & & +\infty \\ P & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & -\frac{\Delta}{4a} & & \end{array}$
$a < 0$				$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & \frac{-b}{2a} & & +\infty \\ \hline & & & -\frac{\Delta}{4a} & & \\ P & & \nearrow & & \searrow & \\ & -\infty & & & & -\infty \end{array}$
Racines ($P(x) = 0$)	$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$	pas de racine	