Feuille d'exercices 8 : Logarithmes 09-02-11-
Terminale ES 1, 2010-2011, Y. Angeli

1. Extrait du sujet bac ES Nouvelle Calédonie sept. 2010 (5pts)

A. On considère la fonction g définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \ln x - \dfrac{1}{2}$.

1. Étudier les variations de g sur $[1\ ;\ +\infty[$.
2. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ dans $[1\ ;\ +\infty[$.
3. En déduire que $g(x) > 0$ si et seulement si $x > \sqrt{\mathrm{e}}$.

B. On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2x^2(\ln x - 1) + 2$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
   (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = 4xg(x)$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[1\ ;\ +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.
3. (a) Montrer que, dans l'intervalle $[2\,;\ 3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α.
   (b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

2. Extrait du sujet bac ES Polynésie septembre 2010 (5pts)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $f(x) = -x^2 - x + 4 + \ln(x+1)$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal, donnée en annexe.
On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Justifier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\ 4]$.
3. Montrer que sur l'intervalle $[0\,;\,4]$, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
4. On définit la fonction F dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par :
   $$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + (x+1)\ln(x+1).$$
   Montrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

5. Soit $\mathcal{A}$ l' aire, en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
   (a) Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur la figure fournie en annexe.
   (b) Par lecture graphique, donner un encadrement par deux entiers consécutifs de $\mathcal{A}$.
   (c) Calculer la valeur exacte en unités d'aire de $\mathcal{A}$. Vérifier la cohérence de vos résultats.

ANNEXE