

FEUILLE D'EXERCICES 8 : INTRODUCTION DU LOGARITHME -21-01-11-  
Terminale ES 1, 2010-2011, Y. Angeli

PROBLÈME. *Introduction au Logarithme Néperien*

On note  $\ln$  et on appelle *logarithme néperien* la primitive de la fonction inverse  $x \mapsto \frac{1}{x}$  définie sur  $]0; +\infty[$  telle que  $\ln(1) = 0$ .

1. Définition. Encadrement de  $\ln 2$

(a) Justifier l'existence de  $\ln$  par un théorème du cours sur les primitives.

(b) Montrer que  $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ .

(c) Encadrer  $\frac{1}{t}$  pour  $t \in [1; 2]$ . Dédire un encadrement de  $\ln 2$ .

2. Quelle est la dérivée de  $\ln$ ? Quel est le sens de variation de  $\ln$ ?

3. Relation fondamentale et conséquences

(a) Soit  $y > 0$  et  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(yx) - \ln(y) - \ln(x)$ . Calculer  $f(1)$ .

(b) Calculer la dérivée de  $f$ . Que vaut la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ ?

(c) En déduire que pour tous  $x, y > 0$ ,  $\ln(y \times x) = \ln(y) + \ln(x)$

(d) Appliquer la relation à  $x > 0$  et  $y = \frac{1}{x}$ . En déduire que  $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ .

(e) À l'aide de la relation, montrer que  $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$  pour  $x, y > 0$ .

(f) Montrer par récurrence que  $\ln(x^n) = n \ln x$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

4. Limites

(a) Pour  $x > 0$ , on note  $n(x)$  le nombre de chiffres avant la virgule dans l'écriture de  $x$ . Que vaut  $n(2010,0127)$ ? Quel est le plus petit nombre à  $n$  chiffres avant la virgule? En déduire  $x \geq 10^{n(x)}$ .

(b) Montrer que  $\ln(x) \geq n(x) \ln(10)$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)$ .

(c) Des la questions 4.b et 3.d, déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x)$ . Interprétation?

5. Nombre  $e$

6. Écrire  $\ln 4$  en fonction de  $\ln 2$ . En déduire  $\ln 4 > 1$ .

7. Démontrer que l'équation  $\ln(x) = 1$  admet une solution unique  $e$  sur l'intervalle  $]2; 3[$

8. Que vaut  $\ln(e^n)$ ?  $\ln \frac{1}{e}$ ?