Devoir maison 4 - à rendre le -08-02-11-
Terminale ES 1, 2010-2011, Y. Angeli

Partie A

1. Donner le tableau de variation complet de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$.
2. Démontrer que $g(x) = -2$ admet une solution unique sur $]-2; -1[$. On note $\sqrt[3]{-2}$ cette solution.
3. Déduire de 1 et 2 le tableau de signes de $x^3 + 2$.
4. Conjecturer une solution de $x^3 - 1 = 0$ et la vérifier par le calcul.
5. Déduire de 1 et 3 le tableau de signes $x^3 - 1$.

Partie B. Soit $f :]\sqrt[3]{-2}; +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto 3\left(\dfrac{x}{x^3+2}\right)^2$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter.
2. Déterminer la limite de f en $\sqrt[3]{-2}$. Interpréter.
3. Démontrer que $f'(x) = -12\dfrac{x(x^3-1)}{(x^3+2)^3}$.
4. À l'aide de la partie A, dresser le tableau de variation de f.
5. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
6. Quelle est la position relative de cette tangente avec la courbe ?
7. Tracer la tangente et les asymptotes, ainsi que la courbe dans un repère orthonormé.

Partie C.

1. Montrer que $f(x) = 3x^2 \times \dfrac{1}{(x^3+2)^2}$ et déterminer une primitive de f.
2. Pour $t > 0$, calculer $\mathcal{A}(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)dx$.
3. Donner une interprétation de $\mathcal{A}(t)$.
4. Déterminer la limite de $\mathcal{A}(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
5. Interpréter le résultat précédent en terme d'aire.