CONTRÔLE COMMUN -01-12-10-
Terminales ES, 2010-2011

PROBLÈME COMMUN- (11 POINTS)

Soit $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x^3 + 7x - 3}{x^2}$.

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 0.5cm.

1. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter géométriquement le résultat.
2. (a) Calculer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.
   (b) Démontrer que pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x + \dfrac{7}{x} - \dfrac{3}{x^2}$.
   (c) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.
   (d) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ.
3. (a) Montrer que pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)(x-2)}{x^3}$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f.
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]0.1; 1[$.
   (b) Montrer que $f(x) = 0$ admet α pour seule solution sur $\mathbb{R}$.
   (c) Donner une valeur approchée de α à $0,1$ près
5. (a) Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1.
   (b) Montrer que $\mathcal{C}_f$ possède une tangente T' à $\mathcal{C}_f$ parallèle à Δ et déterminer son équation.
6. Représenter Δ, T, T' et $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

EXERCICE COMMUN. (4 POINTS)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule réponse est exacte. Le candidat notera à chaque fois sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

Le barème sera établi comme suit :

pour une réponse exacte aux questions 1, 2, 3 et 4 : 0,5 point,
pour une réponse exacte aux questions 5 et 6 : 1 point,
pour une réponse fausse ou l'absence de réponse : 0 point.

Pour toutes les questions, on considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1}$. On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère donné du plan.

1. On a :
   - $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -1$
   - $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$
   - $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$

2. La courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote d'équation :
   - $y = 2$
   - $y = -1$
   - $x = 2$

3. Pour tout réel x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, $f(x)$ peut s'écrire :
   - $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$
   - $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$
   - $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

4. Le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ est donné par le tableau :
   -

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

   -

x	-1		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	

   -

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

5. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est :
   - $\dfrac{3}{2}$
   - $\dfrac{1}{4}$
   - $-\dfrac{1}{2}$

6. En $+\infty$, $\mathcal{C}$ admet une asymptote d'équation
   - $y = 2$
   - $y = 2x$
   - $x = 2$

Exercice (obligatoire - pas d'option math) : 5 points

Le coût total de fabrication d'un produit est donnée par $C(q) = \frac{q^3}{3} - 6q^2 + 40q$ pour $q \in [0; 12]$ où q représente le nombre de milliers d'unités fabriquées et $C(q)$ le coût de fabrication en centaines d'euros.

1. On rappelle que le coût unitaire moyen est donné par $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$ pour tout $q > 0$.
   (a) Exprimer en fonction de q le coût unitaire moyen.
   (b) Calculer le nombre $q0$ d'unités à fabriquer pour que le coût moyen soit minimal.
2. On appelle coût marginal la dépense occasionnée par la production d'un objet supplémentaire. On modélise ce coût marginal par $C_m(q) = C'(q)$ où C' est la dérivée de C.
   (a) Exprimer en fonction de q le coût marginal.
   (b) Vérifier que pour $q0$, le coût marginal est égal au coût moyen.
3. On suppose que l'entreprise vend toute sa production. Pour $q \in]0; 12]$ le bénéfice en centaines d'euros, pour la production et la vente de q milliers d'unités est $B(q) = -\frac{q^3}{3} + 2q^2 + 21q$.
   (a) Calculer le nombre d'unités à produire pour que l'entreprise soit rentable.
   (b) Déterminer le nombre d'unités à fabriquer pour obtenir le bénéfice maximum. Que vaut ce bénéfice maximal ?