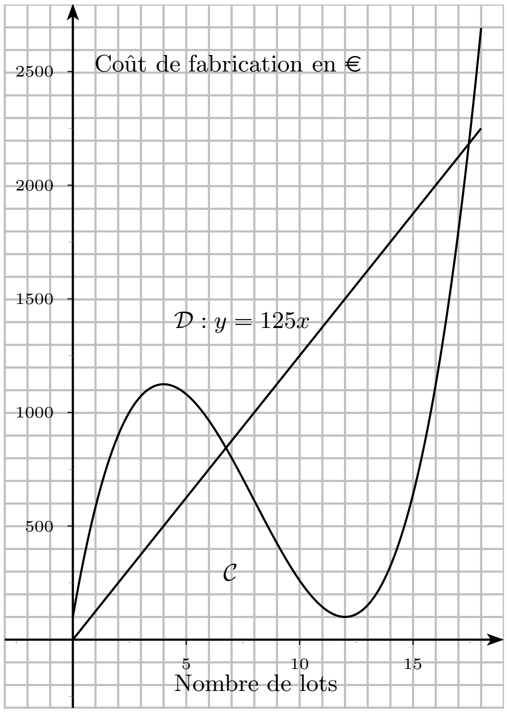
Contrôle commun -20-10-10-
Terminales ES, 2010-2011, M. Angeli et Mme Obe

Problème - Partie A



Dans cette partie, on fait une étude graphique. Une entreprise fabrique des jouets qu'elle vend par lots. On admet que le coût de fabrication d'un nombre x de lots, x appartenant à l'intervalle $[0; 18]$, est donné par la fonction dont la courbe $\mathcal{C}$ est jointe. Chaque lot est vendu 125€. La recette est donc donnée par $R(x) = 125x$. La droite $\mathcal{D}$ représentant R est dessinée dans le même repère que $\mathcal{C}$.

1. L'entreprise ne vend que des nombres entiers de lots. Déterminer graphiquement les valeurs du nombre x de lots pour lesquelles l'entreprise réalise un bénéfice. Justfier brièvement.
2. (a) On appelle M le point d'abscisse 8 qui est sur la courbe $\mathcal{C}$. Donner une valeur approchée de son ordonnée.
   (b) On appelle N le point d'abscisse 8 qui est sur la droite $\mathcal{D}$. Calculer son ordonnée.
   (c) Mesurer sur le graphique la longueur MN. Que représente-t-elle ?
3. En s'inspirant de la méthode graphique qui précède, donner en justifiant le nombre de lots à vendre pour réaliser le bénéfice maximal.

Problème - Partie B

L'entreprise désire faire une étude plus précise de son bénéfice. On étudie la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 18]$ par $f(x) = 4x^3 - 96x^2 + 576x + 100$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0; 18]$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in [0; 18]$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 18]$.
4. Recopier et compléter le tableau :

x	12	13	14
$R(x) - f(x)$			

5. (a) Que représente la différence $R(x) - f(x)$?
   (b) Les résultats obtenus dans le tableau de la question 4 sont-ils conformes à ce qui a été constaté graphiquement à la question 3 de la partie A ?

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 + x - 3$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α unique sur l'intervalle $]1;2[$.
5. Expliquer à l'aide du tableau de variation pourquoi α est la seule solution de $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
6. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.