Bac Blanc de Mathématiques (non spécialistes) -01-06-11-
Terminale ES, 3 Heures, avec calculatrice

Exercice 1 **5 points**

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près.

On rappelle que si A et B sont deux évènements d'un ensemble probabiliste, avec A de probabilité non nulle, la probabilité de B sachant A est le réel noté $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$.

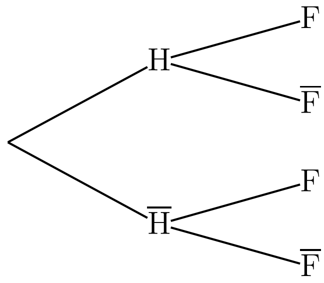
L'asthme est une maladie inflammatoire chronique des voies respiratoires en constante augmentation.
En France les statistiques font apparaître que, parmi les adultes, environ 4 % des hommes et 5 % des femmes sont asthmatiques.

Dans la population française, on considère l'ensemble des couples homme-femme.

Partie A Étude de l'état d'asthme du couple

On note : H l'évènement : « L'homme est asthmatique », et F l'évènement : « La femme est asthmatique ». On admet que les évènements H et F sont indépendants.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre.
2. On note les évènements :
   A : « Aucun des deux adultes du couple n'est asthmatique »
   B : « Un seul des deux adultes du couple est asthmatique »
   C : « Les deux adultes du couple sont asthmatiques »
   Montrer que : $P(\mathrm{A}) = 0,912$;
   $P(\mathrm{B}) = 0,086$; $P(\mathrm{C}) = 0,002$.



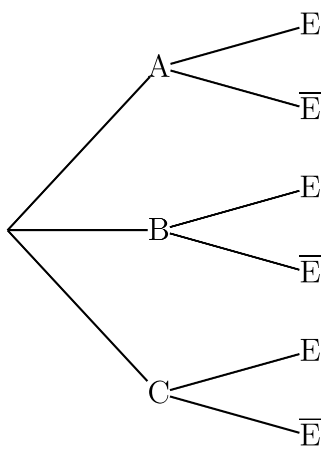
Partie B Étude de la transmission de l'asthme au premier enfant

Les études actuelles sur cette maladie montrent que :

- Si aucun des parents n'est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de $0,1$.
- Si un seul des parents est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de $0,3$.
- Si les deux parents sont asthmatiques, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de $0,5$.

On note E l'évènement : « Le premier enfant du couple est asthmatique ».

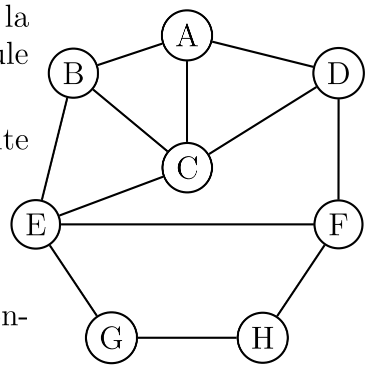
1. Reproduire sur votre copie puis compléter l'arbre de probabilités ci-contre.
2. Montrer que $P(\mathrm{E}) = 0,118$.
3. Calculer $P_{\mathrm{E}}(\mathrm{A})$ et interpréter le résultat.
   Déduire $P_{\mathrm{E}}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)$ et interpréter le résultat.
4. Quelle est la probabilité qu'un enfant non asthmatique ait au moins un de ses parents asthmatiques ?
   (**Indication :** on pourra chercher à calculer l'évènement contraire)



Exercice 1 **5 points**

Partie A Étude d'un site

Un site internet comporte 8 pages (A,B,C,D,E,F,G,H) reliées entre elles suivant le graphe ci-dessous.
Ainsi, par exemple, à partir de la page A on peut directement accéder aux pages B, C et D. Par contre, la page A ne permet pas d'accéder directement à la page F.

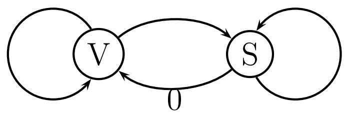


1. Le technicien souhaite tester les liens de pages. En partant de la page A, est-il possible de trouver un parcours passant une seule fois par tous les liens de pages ? Justifier la réponse.
2. Pour marquer les changements de page, l'administrateur du site souhaite que deux pages reliées aient des couleurs différentes.
   On note N le nombre minimum de couleurs nécessaires.
   (a) Donner un sous-graphe complet d'ordre maximal.
   (b) En utilisant la question 2. a. et à l'aide d'un algorithme, montrer, que $N = 3$.

Partie B Étude de propagation d'un virus d'un site à l'autre

Le site précédent, appelé site n° 1, propose un unique lien vers un site partenaire, appelé Site n° 2, sans retour possible. De même, le site n° 2 propose un unique lien vers un site n° 3, sans retour possible et ainsi de suite ... (voir le schéma ci-dessous) :
Site n° 1 $\longrightarrow$ Site n° 2 $\longrightarrow$ Site n° 3 $\longrightarrow$ ... $\longrightarrow$ Site n° n $\longrightarrow$ Site n° $n+1$ ...
Le site n° 1 vient d'être infecté par un virus informatique qui utilise les liens entre les sites pour essayer de se propager, les autres sites n'étant pas encore touchés.
Face à ce nouveau virus, les antivirus ne sont efficaces qu'à 80 %. On note :
⋆ V l'état « le site est infecté par le virus »
⋆ S l'état « le site est sain (non infecté par le virus) ».

On a dessiné ci-dessous le graphe probabiliste traduisant les risques de propagation du virus d'un site au suivant :



1. Justifier la valeur 0 indiquée sur le graphe probabiliste précédent, puis recopier et compléter ce graphe sur votre copie.
2. Préciser la matrice de transition M de ce graphe (première ligne pour V, deuxième ligne pour S)
   Pour tout entier naturel non nul n, on note :
   P_n la probabilité que le n-ième site soit infecté, Q_n la probabilité que le n-ième site soit sain et $X_n = (P_n \quad Q_n)$.
   On a donc $X_1 = (1 \quad 0)$ (traduisant que le site n° 1 est infecté) et $X_{n+1} = X_n\, M$.
3. (a) En utilisant la relation $X_{n+1} = X_n M$, montrer $P_{n+1} = 0,2P_n$.
   (b) En déduire P_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (P_n) lorsque n tend vers plus l'infini.

Exercice 2 **5 points**

Pour chacune des questions, une seule des réponses **a,** ***b*** *ou* **c** *est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte* 1 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note est ramenée à* 0.

1. Le nombre réel $\mathrm{e}^{\frac{3x}{2}}$ est égal à :

   a. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{2}}$ **b.** $\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2}$ **c.** $\left(\sqrt{\mathrm{e}^{x}}\right)^{3}$

2. L'équation $\ln\left(x^2 + x + 1\right) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$:

   a. Aucune solution **b.** Une seule solution **c.** Deux solutions

3. L'équation $\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{-x}$ admet sur $\mathbb{R}$:

   a. Aucune solution **b.** Une seule solution **c.** Deux solutions

4. On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ vérifiant la propriété suivante :
   Pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 1$.
   On peut alors affirmer que :

   a. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ **b.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ **c.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

5. On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle I, telles que g est une primitive de la fonction f sur I. On suppose que la fonction g est croissante sur I. Alors on peut affirmer que :

   a. La fonction g est positive sur I.
   b. La fonction f est positive sur I.
   c. La fonction f est croissante sur I.

Exercice 3 **5 points**

L'Organisation des Nations Unies (ONU) a établi en 2008 des statistiques et des prévisions sur la population mondiale.
Le tableau suivant donne la population recensée par l'ONU. (*La population en* 2010 *est considérée par l'ONU comme très proche de la réalité compte tenu de la date à laquelle l'étude a été effectuée.*)

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Population (en millions de personnes) : y_i	2529	3023	3686	4438	5290	6115	6908

1. (a) Calculer l'augmentation de population entre les années 1950 et 1960, puis entre les années 1970 et 1980, puis entre les années 1990 et 2000.
   Un ajustement affine est-il pertinent ?

   (b) Calculer le pourcentage d'augmentation de la population mondiale entre les années 1990 et 2000. On donnera la valeur arrondie à 0,1 % près.

2. On envisage un ajustement exponentiel.

   (a) Pour chaque année x_i, calculer $\ln y_i$ et compléter le tableau suivant sur la feuille donnée en annexe 1 avec les valeurs approchées arrondies à $0,01$ près.

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$							

   (b) Représenter le nuage de points $M_i\,(x_i\ ;\ z_i)$ sur la feuille donnée en annexe 1.

3. (a) Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Aucune justification n'est demandée, les calculs seront effectués avec la calculatrice et les coefficients arrondis au millième.

   (b) Tracer cette droite d'ajustement sur le graphique de la question 2.

4. Déduire de l'ajustement précédent l'expression de la population y donnée en fonction du rang x de l'année, sous la forme : $y = A\mathrm{e}^{Bx}$ où A et B sont des nombres réels à déterminer.
   On arrondira A à l'unité et B au millième.

5. On suppose que $y = 2180\mathrm{e}^{0,171x}$. Quelle estimation peut-on alors donner pour la population mondiale en 2030 ?
   On donnera les valeurs approchées arrondies au million près.

Exercice 4 **5 points**

Suite à un accident industriel, un gaz se répand dans un local d'usine.
L'évolution du taux de gaz dans l'air peut être modélisé grâce à la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$$

où x est le nombre de minutes écoulées depuis l'accident et $f(x)$ le taux de gaz dans l'air exprimé en parties pour million (ppm).

1. (a) On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right) = 0$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   (b) On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe pour x élément de l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

   Donner le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

2. On admet que le taux de gaz dans l'air est négligeable après 5 minutes. C'est pourquoi, dans la suite de l'exercice, on restreindra l'étude de la fonction f à l'intervalle $[0\,;\,5]$.

   Le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ est donnée en annexe 2.

   (a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ par
   $F(x) = (-2-2x)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur cet intervalle.

   (b) Calculer la valeur moyenne m (exprimée en ppm) du taux de gaz pendant les 5 minutes.

   On déterminera la valeur exacte de m puis on donnera sa valeur approchée arrondie à $0,01$ ppm près.

3. **Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**

   On considère que le gaz a un effet irritant pour l'organisme si le taux dépasse $0,65$ ppm pendant plus d'une minute. Déterminer si le personnel de l'usine a été affecté ou non par la fuite de gaz, en explicitant la démarche.

Nom - classe :

ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)

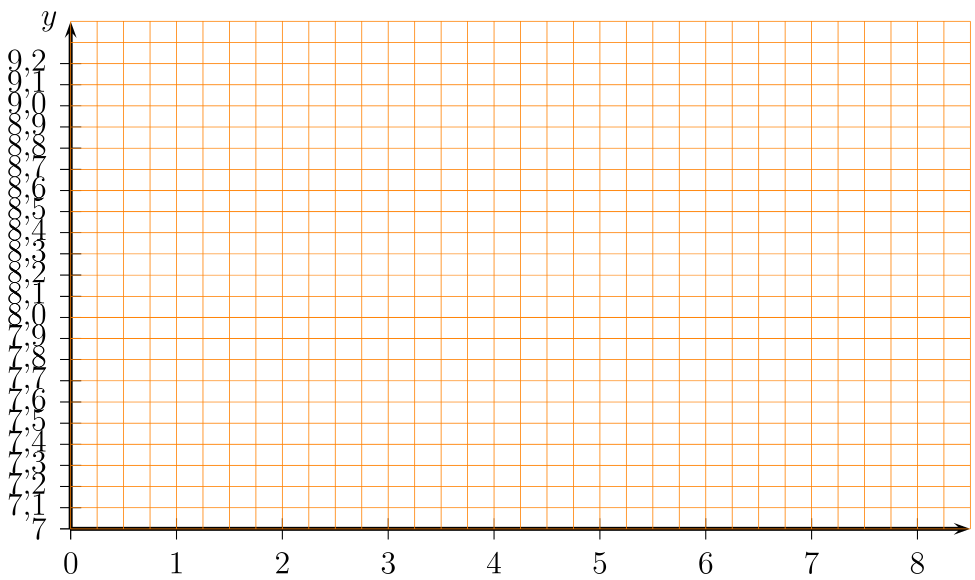
EXERCICE 3 (commun à tous les candidats)

Question 2 :

Tableau à compléter :

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$							

Représentation du nuage de points $M_i\,(x_i\ ;\ z_i)$:



ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)

Exercice 4 (commun à tous les candidats)

Représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.