Bac Blanc de Mathématiques (non spécialistes) -17-03-11-
Terminale ES, 3 Heures, avec calculatrice

Exercice 1. (commun à tous les candidats) **(5 points)**

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B ou C est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Barème : une réponse exacte rapporte 1 *point, une réponse fausse enlève* $0,25$ *point, l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif la note globale attribuée à l'exercice est* 0.

La courbe $\mathcal{C}$ de l'annexe 1 est une partie de la courbe représentative, dans un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\mathrm{I} = [-4\ ;\ 4]$. La droite T tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $\mathrm{A}(0\ ;\ 1,5)$ passe par le point $\mathrm{B}(3\ ;\ 0)$. On note f' la fonction dérivée de f.

1. $f'(0)$ est égal à :

   Réponse A : 1,5 — Réponse B : $-0,5$ — Réponse C : 0,5

2. $f'(x) \leqslant 0$ si x appartient à l'intervalle :

   Réponse A : $[-4\ ;\ -1]$ — Réponse B : $[1\ ;\ 3]$ — Réponse C : $[0\ ;\ 1]$

3. $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est un nombre de l'intervalle :

   Réponse A : $[0\,;\,2]$ — Réponse B : $[2\,;\,4]$ — Réponse C : $[4\,;\,6]$

4. L'équation $\ln[f(x)] = 0$ a exactement :

   Réponse A : 1 solution — Réponse B : 2 solutions — Réponse C : 3 solutions

5. Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 1[$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. La fonction g est croissante sur l'intervalle :

   Réponse A : $[-3\ ;\ -1]$ — Réponse B : $[-2\ ;\ 1[$ — Réponse C : $[0\ ;\ 1[$

Bac Blanc de Mathématiques (spécialistes) -17-03-11-
Terminale ES, 3 Heures, avec calculatrice

Exercice 1. (commun à tous les candidats) **(5 points)**

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B ou C est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Barème : une réponse exacte rapporte 1 *point, une réponse fausse enlève* 0,25 *point, l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif la note globale attribuée à l'exercice est* 0.

La courbe $\mathcal{C}$ de l'annexe 1 est une partie de la courbe représentative, dans un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\mathrm{I} = [-4\ ;\ 4]$. La droite T tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $\mathrm{A}(0\ ;\ 1,5)$ passe par le point $\mathrm{B}(3\ ;\ 0)$. On note f' la fonction dérivée de f.

1. $f'(0)$ est égal à :

   Réponse A : 1,5 Réponse B : $-0,5$ Réponse C : 0,5

2. $f'(x) \leqslant 0$ si x appartient à l'intervalle :

   Réponse A : $[-4\ ;\ -1]$ Réponse B : $[1\ ;\ 3]$ Réponse C : $[0\ ;\ 1]$

3. $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est un nombre de l'intervalle :

   Réponse A : $[0\,;\,2]$ Réponse B : $[2\,;\,4]$ Réponse C : $[4\,;\,6]$

4. L'équation $\ln[f(x)] = 0$ a exactement :

   Réponse A : 1 solution Réponse B : 2 solutions Réponse C : 3 solutions

5. Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 1[$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. La fonction g est croissante sur l'intervalle :

   Réponse A : $[-3\ ;\ -1]$ Réponse B : $[-2\ ;\ 1[$ Réponse C : $[0\ ;\ 1[$

Exercice 2. (commun à tous les candidats) **(6 points)**

Les parties A et B sont indépendantes. Le candidat pourra utiliser les résultats préliminaires dans la partie A, même s'il ne les a pas établis.

Préliminaires

On admet les éléments du tableau de signes ci-dessous.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\dfrac{6}{x} - 6x^2$	||	$+$	0	$-$	

Soit g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = 6\ln x - 2x^3 - 3.$$

On désigne par g' la fonction dérivée de g.

1. Calculer $g'(x)$.
2. En utilisant 1., déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$. On ne demande pas les limites dans cette question.
3. En déduire que $g(x) < 0$ pour tout $x \in]0~;~+\infty[$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{3\ln x}{2x^2}$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 0.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in]0~;~+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{2x^3}$.
   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B

1. On définit la fonction F sur I'intervalle $]0~;~+\infty[$ par
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} \times \frac{1 + \ln x}{x}.$$
Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. On a représenté dans l'annexe 2, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f notée $\mathcal{C}_f$.
On a colorié le domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
Donner la valeur exacte, exprimée en unités d'aire, de l'aire de ce domaine, puis une valeur approchée arrondie au centième.

EXERCICE 3. (commun à tous les candidats) **(5 points)**

Partie 1

Sachant qu'il y avait 13 millions de cotisants au régime général de retraites en France métropolitaine en 1975 et 16,6 millions de cotisants en 2005, calculer le pourcentage d'augmentation du nombre de cotisants entre 1975 et 2005. On arrondira le résultat à 0,1 % près.

Partie 2

Le tableau ci-dessous donne le nombre de retraités en France métropolitaine entre 1975 et 2005 :

Année	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
Rang de l'année x_i, $0 \leqslant i \leqslant 6$	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de retraités (en millions) y_i $0 \leqslant i \leqslant 6$	4,1	5,0	5,9	7,4	8,3	9,7	10,7

Source : INSEE / Caisse Nationale d'Assurance Vieillesse 2007

1. Sur une feuille de papier millimétré, représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$, $0 \leqslant i \leqslant 6$, associé à la série statistique dans un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm en abscisse (pour les rangs d'année) et 1 cm en ordonnée (pour 1 million de retraités).
2. (a) Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série statistique.

   (b) Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation réduite de la droite d d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés (on arrondira les coefficients au dixième).

   (c) Placer le point G et tracer la droite d dans le repère construit à la première question.
3. En utilisant l'ajustement trouvé à la question 2, déterminer par un calcul une estimation du nombre de retraités en 2010.

Partie 3

On utilisera les données des parties 1 *et* 2. *Dans cette partie, les résultats seront donnés sous forme de pourcentage, arrondis au dixième.*

On appelle rapport démographique de l'année n le rapport

$$R_n = \frac{\text{nombre de cotisants de l'année}n}{\text{nombre de retraités de l'année}n}.$$

1. Calculer le taux d'évolution de R_n entre 1975 et 2005.
2. Entre 2005 et 2010, une étude montre que le nombre de cotisants devrait augmenter de 6,4 % et que le nombre de retraités devrait augmenter de 12,1 %. Calculer le taux d'évolution du rapport démographique entre 2005 et 2010.

   Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 4. (réservé aux candidats n'ayant suivi que l'enseignement obligatoire) **5 points**

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule des quatre propositions a, b, c ou d est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'enlève aucun point.

1. Une ville en pleine expansion a vu sa population augmenter de 20 % pendant quatre années consécutives, puis de 7 % durant chacune des cinq années suivantes, et enfin de 6 % la dixième et dernière année. Le taux d'augmentation annuel moyen (arrondi au dixième) durant la décennie qui vient de s'écouler s'élève à :

   (a) 33,0 %
   (b) 12,1 %
   (c) 11,9 %
   (d) 11,0 %

2. La population de la ville voisine a diminué de 5 % en 2008. Quel pourcen.tage d'augment ation (arrondi au dixième) devrait-elle connaître en 2009 pour que le nombre d'habitants le 1er janvier 2010 soit égal au nombre d'habitants à la date du 1er janvier 2008 ?

   (a) 10,0 %
   (b) 5,3 %
   (c) 5,0 %
   (d) 4,7 %

3. Le double du logarithme d'un nombre est égal au logarithme de la moitié de ce nombre. Quel est ce nombre ?

   (a) -1
   (b) 0
   (c) 0,5
   (d) 2

4. Une telle fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\ 5]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[5\,;\,+\infty[$. Sa courbe représentative C dans un repère du plan admet une tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 6. Laquelle des équations suivantes est celle de la tangente $\mathcal{T}$.

   (a) $y = -3x + 3$
   (b) $y = x$
   (c) $y = 6x - 36$
   (d) $x = 6$

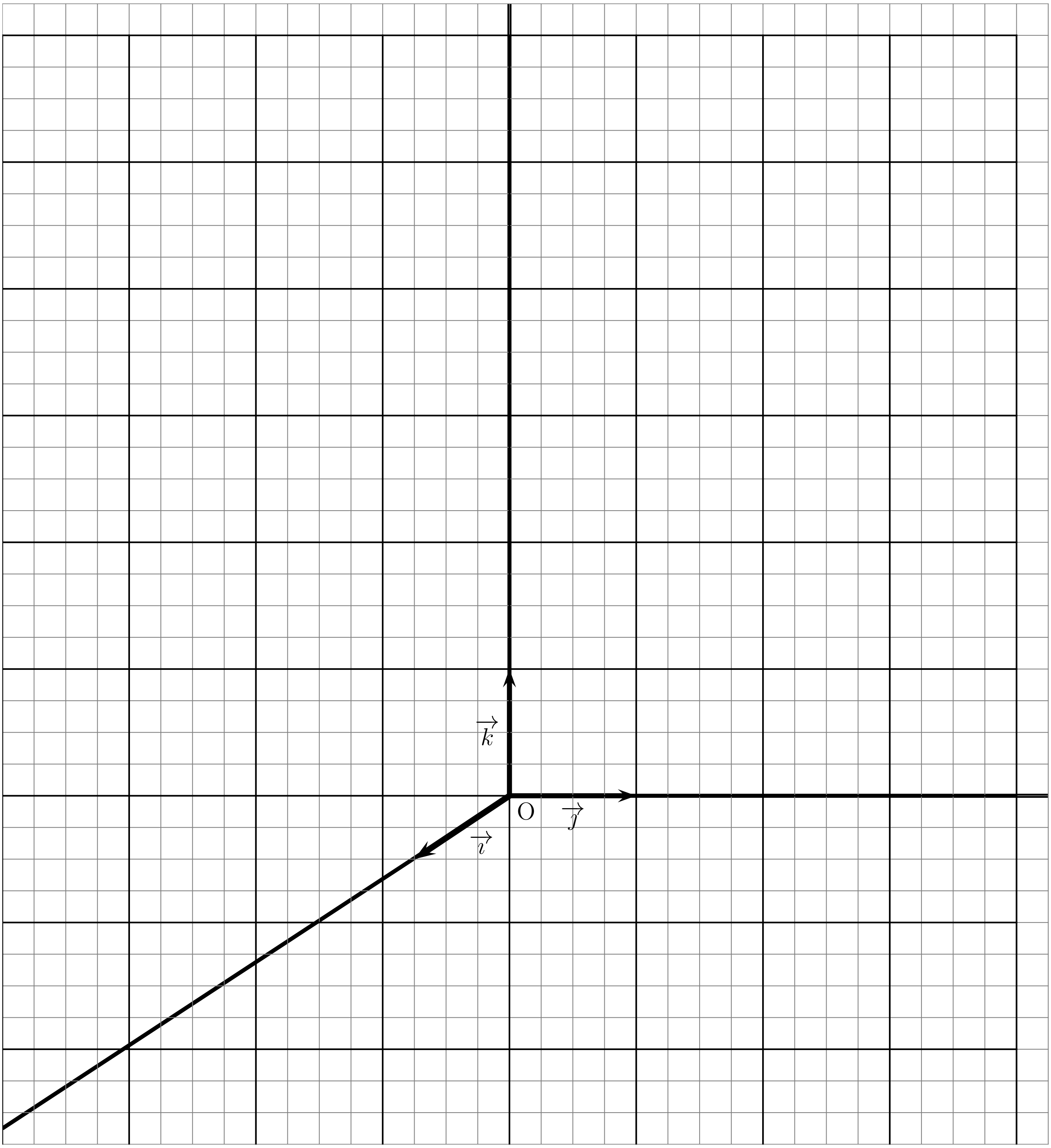
EXERCICE 4 (reservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité) **5 points**

Une annexe est à compléter et à rendre avec une copie séparée.

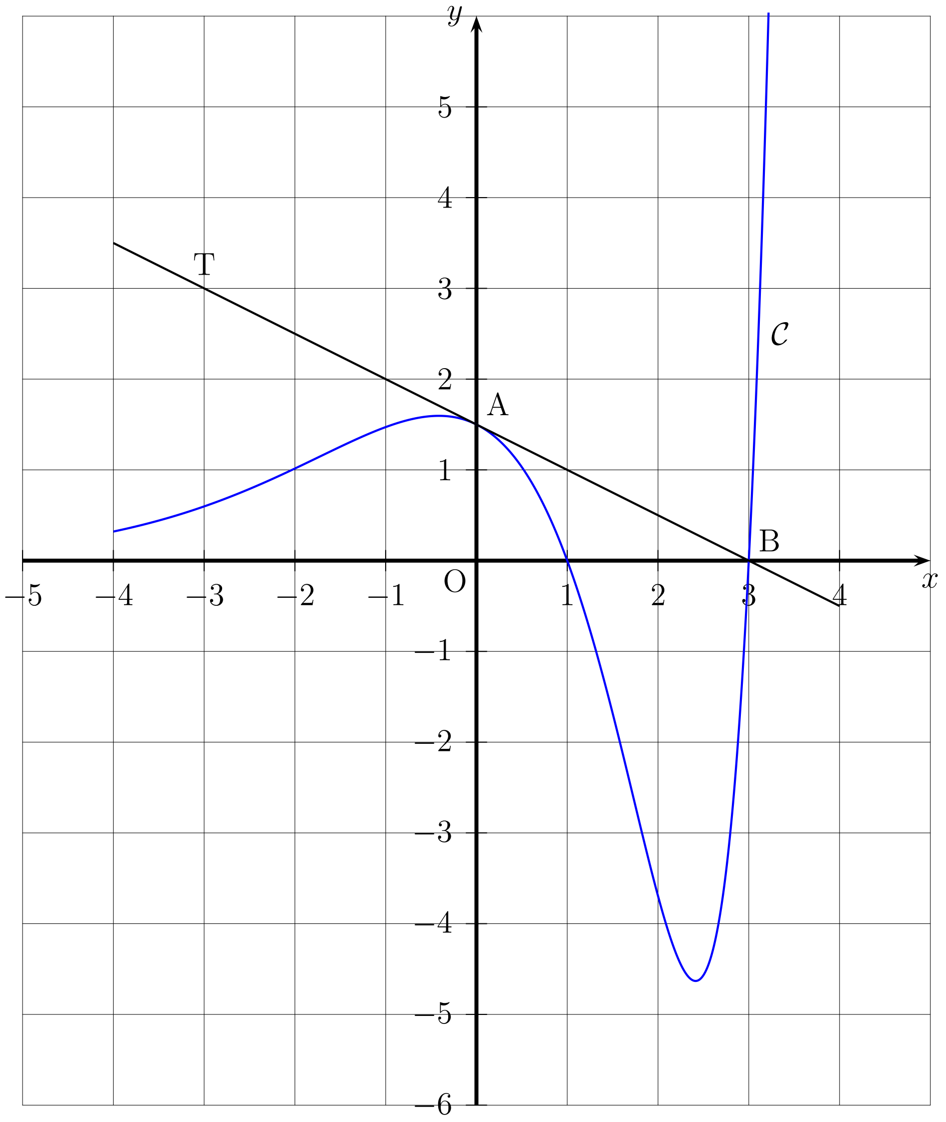
L'espace est muni d'un repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ orthonormal.

1. On donne le plan (P) d'équation $2x + 2y + 3z = 6$.
   (a) Déterminer les coordonnées des points A, B, C intersections du plan (P) avec les axes du repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, puis représenter le plan (P) en noir sur l'annexe.
   (b) Donner un vecteur normal au plan (P)
2. On considère le plan (Q) d'équation $x + 2y = 2$.
   (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersections du plan (Q) avec les axes du repère $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, quand ceux-ci existent, , puis représenter le plan (Q) en bleu sur l'annexe.
   (b) Justifier que les plans (P) et (Q) sont sécants suivant une droite.
   (c) Tracer l'intersection des deux plans (P) et (Q), notée (D), en traits pointillés noir.
3. On donne les points D(1 ; 0 ; 0), E(0 ; −4 ; 0) et F(0 ; 0 ; 4).
   (a) Déterminer par le calcul, une équation du plan (R) contenant D, E et F, sous la forme $ax + by + cz = 4$ et représenter (R) en rouge sur l'annexe à l'aide des points D, E et F.
   (b) Donner, à l'aide de la calculatrice, les coordonnées du point G, intersection des trois plans (P), (Q) et (R).
   (c) (Bonus) Représenter (D'), intersection de (P) et de (R) puis construire le point G sur l'annexe.

Annexe de l'exercice 4 de spécialité (à rendre avec la copie) Nom :



Annexe de l'exercice 1.



Annexe de l'exercice 2.