Chapitre 9 : Fonction exponentielle -08-04-11-
Terminale ES 1, 2010-2011, Y. Angeli

1. Définition et relation fondamentale

On rappelle que la fonction logarithme néperien ln est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, et admet pour limites $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$. En conséquence, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation $\ln(y) = x$ d'inconnue y admet une unique solution.

En outre, si $a, b > 0$, on a : $\boxed{0}$: $\ln(a) = \ln(b) \Longleftrightarrow a = b$.

Définition. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'unique solution de l'équation $\ln(y) = x$ d'inconnue y est notée $y = \exp(x)$. La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est appelée la *fonction exponentielle*. On a donc :

$$x = \ln(y) \Leftrightarrow y = \exp(x)$$

Remarque. L'unique solution de $\ln(y) = 1$ est notée $y = e$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad e^n = \exp(n)$. En effet, $\ln(e^n) = n\ln(e) = n \times 1 = n = \ln(\exp(n))$ donc $e^n = \exp(n)$. On définit plus généralement le nombre e^x par $e^x = \exp(x)$.

Théorème. Pour tout x, y réels et $n \geq 0$ entier, on a :
$\boxed{1}$ $\ln(e^x) = x$ $\boxed{2}$ $e^{\ln x} = x$ si $x > 0$.
$\boxed{3}$ $e^x > 0$ $\boxed{4}$ $e^{x+y} = e^x \times e^y$ $\boxed{5}$ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ $\boxed{6}$ $(e^x)^n = e^{nx}$

Preuve. La propriété $\boxed{1}$ est une conséquence de la définition.
$\boxed{2}$ d'après $\boxed{1}$: $\ln\left(e^{\ln x}\right) = \ln x$, donc $e^{\ln(x)} = x$. d'après $\boxed{0}$.
$\boxed{3}$ e^x est solution de $\ln(y) = x$ et ln est définie sur $]0,+\infty[$, donc $e^x > 0$.
$\boxed{4}$ $\ln\left(e^{x+y}\right) = x + y = \ln(e^x) + \ln(e^y) = \ln(e^x \times e^y)$ donc $e^{x+y} = e^x \times e^y$ par $\boxed{0}$.
$\boxed{5}$ d'après $\boxed{4}$: $e^{x-y} = e^x \times e^{-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$. ($e^y \times e^{-y} = e^0 = 1 = e^y \times \dfrac{1}{e^y}$, donc $e^{-y} = \dfrac{1}{e^y}$).
$\boxed{6}$: $\ln\left((e^x)^n\right) = n\ln\left(e^x\right) = nx = \ln\left(e^{nx}\right)$. On conclue par $\boxed{0}$. $\square$

Exemple.

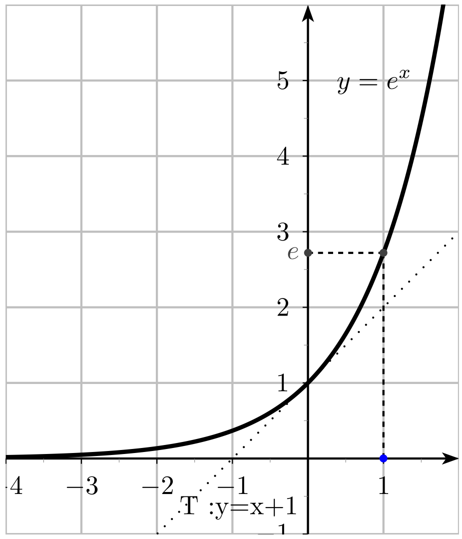
2. Étude de la fonction exponentielle

Théorème. La fonction exponentielle est dérivable, et $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pour tout x. De plus,

$$\exp(0) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

En résumé :

x	$-\infty$		$+\infty$
exp			$+\infty$
		$\nearrow$	
	0		



Preuve. On admet que la fonction exponentielle est dérivable. On pose : $f(x) = \ln(\exp(x)) = x$. La dérivée de f est donc :

$$f'(x) = \frac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1$$

ainsi $\exp'(x) = \exp(x) > 0$: la fonction exponentielle est strictement croissante.
On pose $x = \ln X$.
Comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{\ln X} = \lim\limits_{X\to+\infty} X = +\infty$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^{-x}} = 0 \quad$ car $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$.

Remarque. En conséquence, et par la formule de dérivation des fonctions composées, si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, la fonction e^u est dérivable sur I et a pour dérivée $u'e^u$.

Propriété. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

Preuve. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\ln(e^x)} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{\ln X} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$.
Par ailleurs $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = -\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{e^{-x}} = -\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$. $\square$

Exemple. Dresser le tableau de variations de $x \mapsto x + e^{2x+1}$

3. Exponentielle de base a

Définition. Soit $a > 0$ et b réel. Le nombre a^b est défini par

$$a^b = e^{b \ln a}.$$

La fonction $x \mapsto a^x$ est appelée *exponentielle de base a*.

Remarque. En conséquence des propriétés de l'exponentielle, pour $a > 0$:

- $a^x > 0$
- $a^{x+y} = a^x \times a^y$
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

Propriété. On considère la fonction $f : x \mapsto a^x$, pour $a > 0$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \ln(a) \times a^x$.

⋆ si $a < 1$, f est strictement décroissante, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

⋆ si $a = 1$, f est constante et $f(x) = 1$

⋆ si $a > 1$, f est strictement croissante, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Preuve. $f(x) = a^x = e^{x \ln a} = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x \ln a$ donc $u'(x) = \ln a$. Ainsi,

$$f'(x) = \ln(a) \times e^{x \ln a} = \ln(a) \times a^x.$$

Comme $a^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\ln a$. Donc f est strictement croissante si $a > 1$, constante si $a = 1$ et strictement décroissante si $a < 1$.
Si $a = 1$, $\ln a = 0$ donc pour tout x, $f(x) = e^0 = 1$.
Si $a < 1$, $\ln a < 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = 0$.
De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = +\infty$.
Si $a > 1$, $\ln a > 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = +\infty$.
De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = 0$. □

Exemple. On considère pour $x > 0$ le nombre $x^{\frac{1}{2}}$. Comme $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x = (\sqrt{x})^2$, les nombres $x^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt{x}$ sont deux nombres positifs solutions de l'équation $y^2 = x$ d'inconnue y, donc $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Remarque. Le taux moyen d'augmentation τ sur n périodes identiques d'une quantité qui vaut initialement V_i et finalement V_f vérifie :

$$\tau^n \times V_i = V_f \text{ donc } \tau = \left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exemple. Un placement rapporte $62,8\%$ d'intérêts sur 10 ans. Quel est le pourcentage annuel moyen d'intérêt ?