

CHAPITRE 9 : FONCTION EXPONENTIELLE -08-04-11-  
Terminale ES 1, 2010-2011, Y. Angeli

1. DÉFINITION ET RELATION FONDAMENTALE

On rappelle que la fonction logarithme népérien  $\ln$  est continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ , et admet pour limites  $-\infty$  en  $0$  et  $+\infty$  en  $+\infty$ . En conséquence, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'équation  $\ln(y) = x$  d'inconnue  $y$  admet une unique solution.

En outre, si  $a, b > 0$ , on a :  $\boxed{0}$  :  $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$ .

**Définition.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . L'unique solution de l'équation  $\ln(y) = x$  d'inconnue  $y$  est notée  $y = \exp(x)$ . La fonction  $x \mapsto \exp(x)$  est appelée la *fonction exponentielle*. On a donc :

$$x = \ln(y) \iff y = \exp(x)$$

**Remarque.** L'unique solution de  $\ln(y) = 1$  est notée  $y = e$ . On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $e^n = \exp(n)$ . En effet,  $\ln(e^n) = n \ln(e) = n \times 1 = n = \ln(\exp(n))$  donc  $e^n = \exp(n)$ . On définit plus généralement le nombre  $e^x$  par  $e^x = \exp(x)$ .

**Théorème.** Pour tout  $x, y$  réels et  $n \geq 0$  entier, on a :

$$\boxed{1} \ln(e^x) = x \quad \boxed{2} e^{\ln x} = x \text{ si } x > 0.$$

$$\boxed{3} e^x > 0 \quad \boxed{4} e^{x+y} = e^x \times e^y \quad \boxed{5} e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad \boxed{6} (e^x)^n = e^{nx}$$

**Preuve.** La propriété  $\boxed{1}$  est une conséquence de la définition.

$\boxed{2}$  d'après  $\boxed{1}$  :  $\ln(e^{\ln x}) = \ln x$ , donc  $e^{\ln x} = x$ . d'après  $\boxed{0}$ .

$\boxed{3}$   $e^x$  est solution de  $\ln(y) = x$  et  $\ln$  est définie sur  $]0, +\infty[$ , donc  $e^x > 0$ .

$\boxed{4}$   $\ln(e^{x+y}) = x + y = \ln(e^x) + \ln(e^y) = \ln(e^x \times e^y)$  donc  $e^{x+y} = e^x \times e^y$  par  $\boxed{0}$ .

$\boxed{5}$  d'après  $\boxed{4}$  :  $e^{x-y} = e^x \times e^{-y} = \frac{e^x}{e^y}$ . ( $e^y \times e^{-y} = e^0 = 1 = e^y \times \frac{1}{e^y}$ , donc  $e^{-y} = \frac{1}{e^y}$ ).

$\boxed{6}$  :  $\ln((e^x)^n) = n \ln(e^x) = nx = \ln(e^{nx})$ . On conclue par  $\boxed{0}$ .  $\square$

**Exemple.**

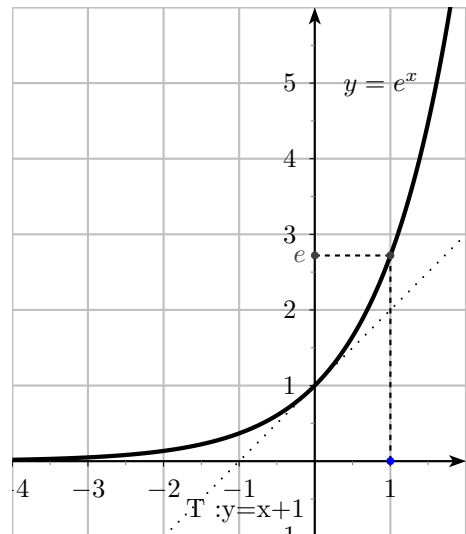
## 2. ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

**Théorème.** La fonction exponentielle est dérivable, et  $\exp'(x) = \exp(x) > 0$  pour tout  $x$ . De plus,

$$\exp(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

En résumé :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$\exp$		$+\infty$
	0	$\nearrow$



**Preuve.** On admet que la fonction exponentielle est dérivable. On pose :  $f(x) = \ln(\exp(x)) = x$ . La dérivée de  $f$  est donc :

$$f'(x) = \frac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1$$

ainsi  $\exp'(x) = \exp(x) > 0$  : la fonction exponentielle est strictement croissante. On pose  $x = \ln X$ .

Comme  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^{\ln X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} X = +\infty$ .

Par ailleurs,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$  car  $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ .

**Remarque.** En conséquence, et par la formule de dérivation des fonctions composées, si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , la fonction  $e^u$  est dérivable sur  $I$  et a pour dérivée  $u'e^u$ .

**Propriété.** On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ .

**Preuve.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(e^x)} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{\ln X} = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ .

Par ailleurs  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{e^{-x}} = - \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ .  $\square$

**Exemple.** Dresser le tableau de variations de  $x \mapsto x + e^{2x+1}$

### 3. EXPONENTIELLE DE BASE A

**Définition.** Soit  $a > 0$  et  $b$  réel. Le nombre  $a^b$  est défini par

$$a^b = e^{b \ln a}.$$

La fonction  $x \mapsto a^x$  est appelée *exponentielle de base a*.

**Remarque.** En conséquence des propriétés de l'exponentielle, pour  $a > 0$  :

$$\bullet a^x > 0 \quad \bullet a^{x+y} = a^x \times a^y \quad \bullet a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad \bullet (a^x)^y = a^{xy}$$

**Propriété.** On considère la fonction  $f : x \mapsto a^x$ , pour  $a > 0$ . Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée  $x \mapsto \ln(a) \times a^x$ .

★ si  $a < 1$ ,  $f$  est strictement décroissante,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

★ si  $a = 1$ ,  $f$  est constante et  $f(x) = 1$

★ si  $a > 1$ ,  $f$  est strictement croissante,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

**Preuve.**  $f(x) = a^x = e^{x \ln a} = e^{u(x)}$  avec  $u(x) = x \ln a$  donc  $u'(x) = \ln a$ . Ainsi,

$$f'(x) = \ln(a) \times e^{x \ln a} = \ln(a) \times a^x.$$

Comme  $a^x > 0$ ,  $f'(x)$  est du signe de  $\ln a$ . Donc  $f$  est strictement croissante si  $a > 1$ , constante si  $a = 1$  et strictement décroissante si  $a < 1$ .

Si  $a = 1$ ,  $\ln a = 0$  donc pour tout  $x$ ,  $f(x) = e^0 = 1$ .

Si  $a < 1$ ,  $\ln a < 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = 0$ .

De même,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ , d'où  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln a} = +\infty$ .

Si  $a > 1$ ,  $\ln a > 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = +\infty$ .

De même,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , d'où  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln a} = 0$ .  $\square$

**Exemple.** On considère pour  $x > 0$  le nombre  $x^{\frac{1}{2}}$ . Comme  $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x = (\sqrt{x})^2$ , les nombres  $x^{\frac{1}{2}}$  et  $\sqrt{x}$  sont deux nombres positifs solutions de l'équation  $y^2 = x$  d'inconnue  $y$ , donc  $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ .

**Remarque.** Le taux moyen d'augmentation  $\tau$  sur  $n$  périodes identiques d'une quantité qui vaut initialement  $V_i$  et finalement  $V_f$  vérifie :

$$\tau^n \times V_i = V_f \text{ donc } \tau = \left( \frac{V_f}{V_i} \right)^{\frac{1}{n}}$$

**Exemple.** Un placement rapporte 62,8% d'intérêts sur 10 ans. Quel est le pourcentage annuel moyen d'intérêt ?