Chapitre 8 : Probabilités -10-03-11-
Terminale ES 1, 2010-2011, Y. Angeli

1. Vocabulaire

Définition. Une *expérience aléatoire* est processus dont l'issue est incertaine. L'*univers* d'une expérience aléatoire est l'ensemble Ω des résultats possibles de cette expérience.
Définir une *loi de probabilité* P sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire, c'est associer à chaque résultat possible x_i de l'ensemble Ω un nombre p_i positif tel que la somme des p_i vaille 1 :

Résultat	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Probabilité	p_1	p_2	p_3	...	p_n

avec pour tout i, $p_i \geq 0$ et $p_1 + ... + p_n = 1$

Exemple. L'expérience aléatoire "tirer à pile ou une face avec une pièce" a un univers de résultats possibles à deux élements : $\Omega = \{pile, face\}$. À l'élément "pile" on associe le nombre $p_{pile} = 0.5$. De même on pose $p_{face} = 0.5$.
On a définit une loi de probabilité car

$$p_{pile} \geq 0,\ p_{face} \geq 0 \text{ et } p_{pile} + p_{face} = 0.5 + 0.5 = 1.$$

Définition. Si chaque élément de l'univers Ω d'une expérience aléatoire a la même probabilité, la loi de probabilité est dite *équirépartie*. Ainsi, si Ω a n éléments, chaque résultat $x_i \in \Omega$ a une probabilité $p_i = \dfrac{1}{n}$.

Exemple. L'expérience aléatoire consistant à lancer un dé équilibré admet une loi de probabilité équirépartie :

Résultat du dé	1	2	3	4	5	6
Probabilité	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

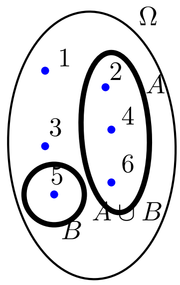
Définition. Un *évènement* $A \subset \Omega$ est une partie de l'univers Ω d'une expérience aléatoire. Les éléments de A sont appelés les *résultats favorables à* A. La probabilité $P(A)$ de l'ensemble A est la somme des probabilités des élements qui constituent A. Dans le cas d'une loi de probabilité équirépartie,

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}.$$

Exemple. L'expérience aléatoire est le lancé d'un dé équilibré, et l'évènement A est "le nombre obtenu est strictement supérieur à 4" :
$P(A) =$

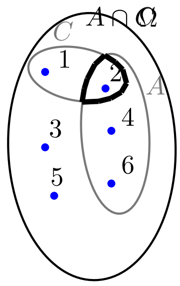
2. Propriétés des probabilités

Dans ce paragraphe, on considère une expérience aléatoire d'univers Ω et de loi de probabilité P. On note A et B deux évènements.



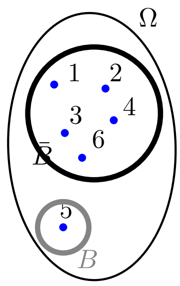
• Lorsque les ensembles A et B sont *disjoints* (n'ont aucun élément en commun), l'évènement $A \cup B = A$ ou B (la réunion des évènements A et B, qui contient à la fois les éléments de A et les éléments de B, et se produit si au moins l'un des évènement A **ou** B se produit) a pour probabilité :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



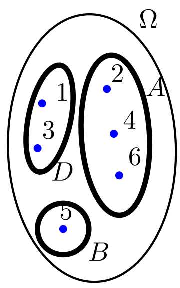
• L'évènement $A \cap B = A$ et B se produit lorsque A et B se produisent. Ses éléments sont dans A **et** B.
• Lorsque les ensembles A et B sont quelconques, l'évènement $A \cup B$ a pour probabilité :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



• L'évènement *complémentaire* $\bar{A}$ de l'évènement A est constitué de tous les résultats possibles qui ne sont pas dans A : l'évènement $\bar{A}$ a pour probabilité :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



• On dit que les évènements $A_1, A_2, ..., A_m$ forment une partition de Ω si chaque élément de Ω est dans un A_i et un seul.

$$\sum_{i=1}^{m} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_m) = 1$$

• Si l'évènement A n'a aucun résultat favorable, $A = \varnothing$ est vide et $P(\varnothing) = 0$.
• Si l'évènement A n'a que des résultats favorables, $A = \Omega$ et $P(\Omega) = 1$.

Exemple. On lance un dé équilibré. On définit l'évènement A : "le résultat obtenu est pair", B :"le résultat obtenu est 5", C :"le résultat est strictement inférieur à 3" et $D = \{1, 3\}$.

$P(A) =$ $\qquad$ $P(B) =$ $\qquad$ $P(C) =$ $\qquad$ $P(D) =$
$P(A \cup B) =$ $\qquad$ $P(A \cap C) =$ $\qquad$ $P(A \cup C) =$
$P(A) + P(B) + P(D) =$

3. Probabilités conditonnelles

Si $P(A) \neq 0$, on appelle *probabilité conditionnelle* de B sachant A le nombre noté $P_A(B)$ ou $P(B|A)$ et défini par

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A)$$

Ce nombre représente la probabilité de l'évènement $A \cap B$ dans l'univers A.

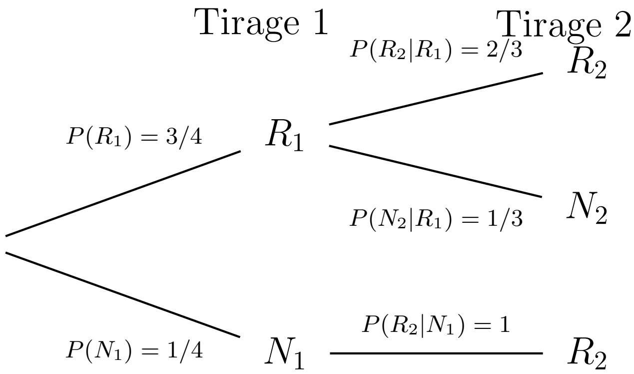
Construction d'un arbre de choix on peut modéliser une situation faisant intervenir les probabilités conditionnelles par un *arbre de choix*. L'arbre se lit de gauche à droite, il est constitué de *nœuds* et de *branches* :

- ⋆ Chaque nœud représente un évènement (le premier représente l'univers).
- ⋆ Les branches partant d'un nœud aboutissent à des évènements qui forment une partition de l'univers.
- ⋆ Près de la branche partant du premier nœud et aboutissant à B on fait figurer la probabilité $P(B)$.
- ⋆ Près de la branche partant de A et aboutissant à B on fait figurer la probabilité $P(B|A)$.

Exemple. On tire deux boules de suite dans une urne contenant 4 boules : 3 boules Rouges, et un boule Noire. On note que l'univers de cette expérience compte 3 éléments : $\Omega = \{RR, RN, NR\}$.(on note RR l'élément "les deux boules sont rouges", RN "la première boule est rouge, la seconde noire" et NR "la première boule est noire et la seconde rouge").

On note R_1 l'évènement "la première boule est rouge", N_1 l'évènement "la première boule est noire". Les évènements R_1 et N_1 forment une partition. (ses deux situations ne peuvent survenir en même temps et couvrent toutes les possibilités).

On note R_2 l'évènement la "deuxième boule est rouge", N_2 l'évènement "la deuxième boule est noire". Les évènements R_2 et N_2 forment une partition.



4. Propriété des arbres de choix

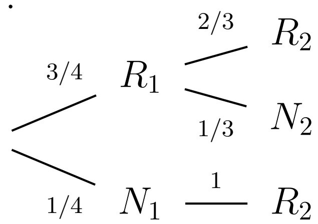
Loi des nœuds : La somme des probabilités associées aux branches issues d'un même nœud vaut 1.
En d'autres termes, si $B_1, ..., B_n$ est une partition et $P(A) \neq 0$ alors :

$$P(B_1|A) + ... + P(B_n|A) = 1$$

Remarque. Cette loi vient du fait que $A \cap B_1$,...,$A \cap B_n$ est une partition de A. Si on connaît toutes les probabilités associées aux branches partant d'un nœud sauf une, on peut la déduire en utilisant cette loi.

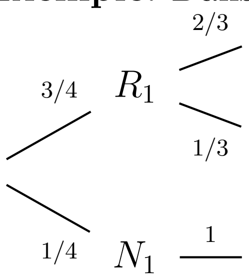
Exemple. Dans l'exemple précédent, on vérifie :

- $P(R_1) + P(N_1) = 3/4 + 1/4 = 1$
- $P(R_2|R_1) + P(N_2|R_1) = 2/3 + 1/3 = 1$
- $P(R_2|N_1) = 1$



Intersections et arbres : Si un chemin parcour sur l'arbre (de gauche à droite) passe par les évènements B_1,...,B_n, alors $P(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n)$ est le produit des probabilités associées à chacune des branches parcourues.

Exemple. Dans l'exemple précédent :



R_2 : $P(R_2 \cap R_1) = 3/4 \times 2/3 = 1/2 = P(RR)$

N_2 : $P(N_2 \cap R_1) = 3/4 \times 1/3 = 1/4 = P(RN)$

R_2 : $P(N_1 \cap R_2) = 1/4 \times 1 = 1/4 = P(NR)$

Formule des probabilités totales. Si $B_1, ..., B_n$ forment une partition, la probabilité d'un évènement quelconque A est donnée par

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_n)$$

En particulier, si chacun des B_i est non vide ($B_i \neq \varnothing$),

$$P(A) = P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \times P(A|B_2) + ... + P(B_n) \times P(A|B_n)$$

Exemple. Dans l'exemple précédent, la formule des probabilités totale mène ainsi à : $P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap R_2) = 1/2 + 1/4 = 3/4$.
On peut en déduire par exemple : $P(R_1|R_2) = \dfrac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{1/2}{3/4} = 2/3$.

5. Évènements indépendants

Deux évènements A et B sont *indépendants* si et seulement si

$$P(A \text{ et } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

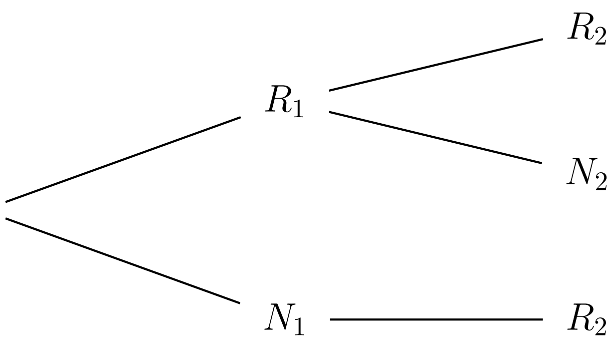
Remarque. Lorsque A et B sont indépendants et non vides, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B|A) = p(A) \times p(B)$ donc $p(A|B) = p(A)$. De même $p(B|A) = p(B)$. Donc intuitivement, le fait que A se soit réalisé n'influe pas sur les chances que l'évènement B a de se réaliser, et réciproquement.

⚠ Cette formule n'est utilisable que si on dispose de l'hypothèse que A et B sont indépendants. Réciproquement, pour prouver l'indépendance de A et B il faut calculer séparément les deux membres de l'égalité et vérifier qu'ils sont identiques.

Exemple. Dans l'exemple précédent,dire si R_1 et R_2 sont indépendants :

$$\left.\begin{array}{ll} P(R_1 \cap R_2) = & \dots\dots\dots\dots \\ P(R_1) \times P(R_2) = & \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Exemple. Si on change le protocole de l'expérience en effectuant de tirages successifs dans le même sac, mais en remettant la première boule tirée (*tirage avec remise*), l'arbre de choix devient :



$P(R_1 \cap R_2) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$P(N_1 \cap R_2) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

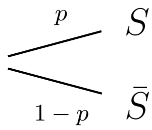
$P(R_2) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Refaire le calcul et dire si R_1 et R_2 sont indépendants :

$$\left.\begin{array}{ll} P(R_1 \cap R_2) = & \dots\dots\dots\dots \\ P(R_1) \times P(R_2) = & \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

6. Loi de Bernoulli, loi binomiale

Définition. Une expérience aléatoire est dite *de Bernoulli* si elle n'a que deux issues possibles S et $\bar{S}$. Il suffit alors de la donnée de $p \in [0;1]$ tel que $P(S) = p$ et $P(\bar{S}) = 1 - p$ pour définir la loi de probabilité de l'expérience.



Exemple. On considère le lancé d'un dé équilibré et on note S l'évènement : "obtenir 6". Donner la loi de probabilité de cette expérinence :
$P(S) =$...
$P(\bar{S}) =$...

Une expérience a une *loi binomiale* si cette expérience est la répétition d'-expériences indépendantes ayant une même loi de Bernoulli. (En conséquence de l'indépendance, $P(S\bar{S}S\bar{S}\bar{S}) = P(S)^2(1 - P(S))^3$).

Exemple. On lance trois dés. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 trois fois ?
$P(SSS) =$

Exemple. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 n fois sur n lancés de dés ? Pour quel n cette probabilité est-elle inférieure à 10^{-6} ?

Exemple. On lance trois dés. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 exactement deux fois ? au moins deux fois ? (faire un arbre)

7. Espérance et variance

On considère l'univers $\Omega = \{x_1, ..., x_n\}$ d'une expérience aléatoire munie d'une loi de probabilité P. On se donne une *loi numérique* (à chaque issue possible x_i on associe un nombre α_i) :

Évènement	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Valeur	α_1	α_2	α_3	...	α_n

L'*espérance* de cette loi est le nombre $\mu = \alpha_1 p_1 + ... + \alpha_n p_n$.
La *variance* de cette loi est le nombre $V = (\alpha_1 - \mu)^2 p_1 + ... + (\alpha_n - \mu)^2 p_n$.
L'*écart-type* est le nombre $\sigma = \sqrt{V}$.

Remarque. L'espérance s'interprète comme une moyenne. Dans le cas d'un jeu, c'est un gain moyen - ou une perte moyenne, si elle est négative. Un jeu est dit équilibré lorsque l'espérance de gain est nulle. La variance et l'écart-type sont des paramètres de dispersion qui se calculent et s'interprétent comme en statistiques.

Exemple. On définit le jeu d'argent suivant : on lance un dé, sur un résultat de 6, le joueur gagne 20 euros, si le résultat est 1, le joueur perd 6 euros, et les autres issues coûtent 5 euros. On associe donc à l'expérience la loi numérique

Résultat du dé	1	2	3	4	5	6
Gain	-6	-5	-5	-5	-5	20

Si le dé est équilibré, la loi de probabilité est équirépartie donc l'espérance de gain est

$$\mu = -6 \times \frac{1}{6} - 5 \times \frac{1}{6} - 5 \times \frac{1}{6} - 5 \times \frac{1}{6} - 5 \times \frac{1}{6} + 20 \times \frac{1}{6} = -\frac{6}{6} = -1$$

L'espérance est de -1 euro, ce qui signifie qu'en moyenne un joueur perd 1 euro sur une partie.
La variance est $V = \dfrac{4499}{6} \approx 74,98$ et l'écart type $\sigma = \sqrt{V} \approx 8,66$