Chapitre 7 : Logarithme Néperien -27-01-11-
Terminale ES 1, 2010-2011, Y. Angeli

1. Définition

Définition. La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant continue sur $]0;+\infty[$, elle admet une unique primitive qui s'annule en 1. On note ln et on appelle *logarithme néperien* cette primitive :
⋆ ln est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$.
⋆ $\ln(1) = 0$.

Propriété. Le logarithme néperien est strictement croissant sur $]0;+\infty[$.
En conséquence, $\boxed{0 < a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b}$ et $\boxed{\text{si } a, b > 0,\ \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b.}$

Preuve. Par définition, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ sur $]0;+\infty[$ donc ln est strictement croissante. □.

Exemple. Résoudre $\ln(2x+1) = \ln(1)$. . . . .
. . . .
Résoudre $\ln(x+2) > 0$ . . . .
. . . .

Remarque. En conséquence de la formule de dérivation des fonctions composées, si u est une fonction dérivable et strictement positive, alors

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Exemple. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(1 - x^2\right)$.
Déterminer l'ensemble de définition de f et dresser son tableau de variation. .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2. Propriété fondamentale

Théorème. Soient $a, b > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a :

- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \ln a$
- $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Preuve. Prouver le premier point revient à montrer que pour tout $a > 0$ fixé, la fonction définie f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$ est nulle pour tout x car :

$$\ln(ax) - \ln(a) - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$$

Or, ln étant dérivable, f est dérivable aussi de dérivée :

$$f'(x) = \frac{a}{ax} - 0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

donc f est une fonction constante : $f(x) = k$ pour tout x.
Mais $f(1) = \ln(a \times 1) - \ln(a) - \ln(1) = \ln(a) - \ln(a) = 0 = k$ donc la fonction f est la fonction nulle, ce qui prouve le premier point.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\ln(a^n) = n \ln a$.

Initialisation : $0 \ln a = 0 = \ln 1 = \ln(a^0)$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Transmission : si $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier n, alors

$$\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln(a) = n \ln(a) + \ln(a) = (n+1) \ln a$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
La propriété est vraie pour tout entier naturel n.

- d'après le point (1), $0 = \ln(1) = \ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln b + \ln \frac{1}{b}$ donc $-\ln b = \ln \frac{1}{b}$.
- enfin, $\ln \frac{a}{b} = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$. $\square$

Exemple.

- $\ln 16 - \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2^3} =$ ....

- $\ln(6400) =$ ....

- Prouver que pour tout $x > 0$, $2\ln(\sqrt{x}) = \ln(x)$ ....

En déduire $\ln \sqrt{x} =$ ....

- $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t} dt > \int_1^2 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(4^n) > n$

....

3. Limites et croissances comparées

Propriété. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty, \qquad \lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty.$
La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe du logarithme.

Preuve. Comme $\ln(4^n) > n$, et que ln est strictement croissante, $\ln x$ est supérieur à n'importe quel entier A pourvu que x soit supérieur à 4^A. Donc lorsque x tend vers l'infini, $\ln x$ tend aussi vers l'infini.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -\ln\frac{1}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} -\ln X = -\infty$ □

Propriété. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \qquad \lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0.$

Preuve. La fonction $g : x \mapsto \ln x - x$ a pour dérivée $\frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$. Donc g est strictement croissante sur $]0;1[$ et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$. Son maximum est donc $g(1) = 0$ d'où $\ln x - x \leq 0$ donc $\ln(x) \leq x$. Or si $x \geq 1$,

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} = \frac{2\times\frac{1}{2}\ln x}{x} = 2\frac{\ln\sqrt{x}}{x} \leq 2\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
Enfin, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\ln\frac{1}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty} -\frac{1}{X}\ln X = 0$. □

Propriété. Plus généralement, si $n > 0$ et $m > 0$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^n)}{x^m} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} x^n \ln(x^m) = 0$$

Preuve. On utilise le résultat précédent :

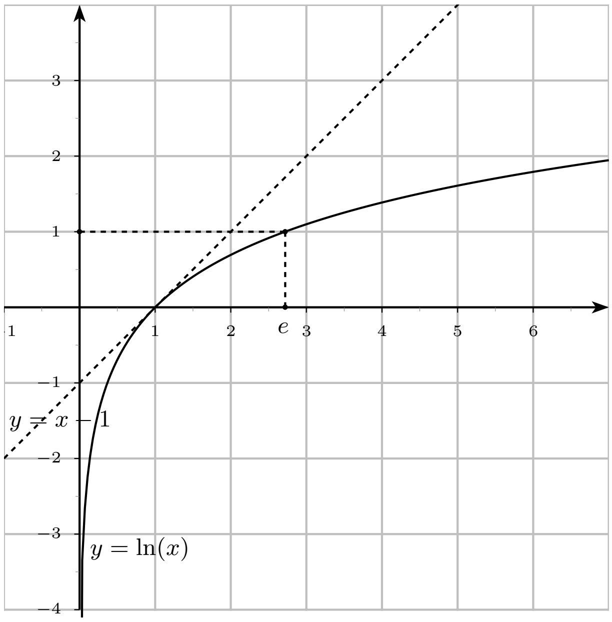
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^n)}{x^m} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n}{m}\frac{\ln(x^m)}{x^m} = \lim_{X\to+\infty} \frac{n}{m}\frac{\ln(X)}{X} = 0$$

Le même raisonnement pour la seconde limite mène au second résultat. □

Exemple. $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \frac{\ln x^2}{x} =$ ....
....
....
....

4. Étude de la fonction logarithme, nombre e

Remarque. L'équation de la tangente T à la courbe du logarithme au point d'abscisse 1 est $y = \ln'(1)(x-1) + \ln 1$. Or $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$ et $\ln 1 = 0$ donc la tangente a pour équation $y = x - 1$.



x	0	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	$+$	
$\ln$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Définition. La fonction ln est strictement croissante sur $]1;4[$, $\ln 1 = 0 < 1 < \ln 4$ et ln est continue sur $[1;4]$. Par le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $\ln x = 1$ admet une unique solution $e \in]1;4[$. On appelle $e \approx 2,718$ cette unique solution.
Comme ln est strictement croissante, e est l'unique solution de $\ln x = 1$ sur $]0;+\infty[$. En particulier, $\boxed{\ln(e) = 1}$

Définition. Plus généralement, on montre que l'équation $\ln x = y$ admet une solution unique sur $]0;+\infty[$, que l'on note e^y. On justifiera ultérieurement la notation en exposant. Ainsi, $\ln(e^y) = y$.

Exemple.
Simplifier $\ln(e^7) =$ ....

Simplifier $2\ln(\sqrt{e}) =$ ....

En déduire $\ln(\sqrt{e}) =$ ....

Simplifier $\ln \frac{1}{e} =$ ....