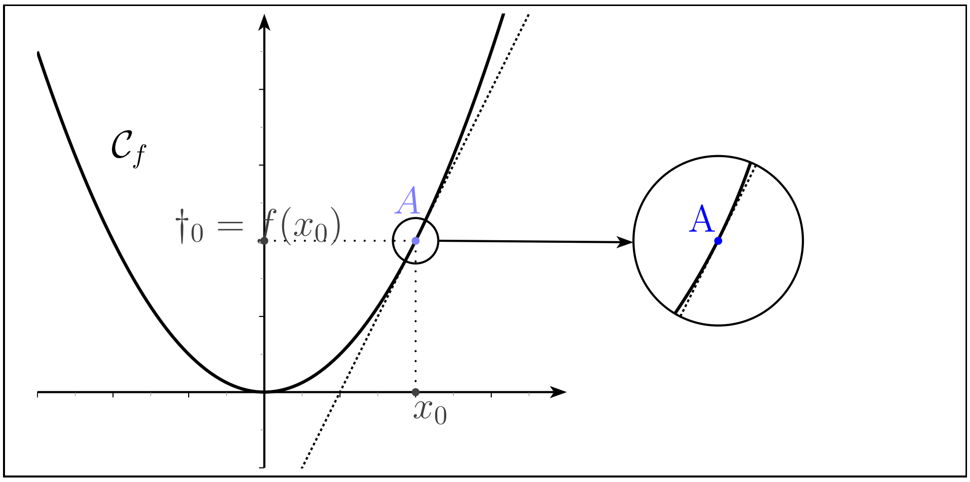
Chapitre 4 : Dérivation -12-11-10-
Terminale ES 1, 2010-2011, Y. Angeli

1. Introduction

La notion de dérivée est apparue aux XVIIe siècle, notamment dans les travaux de Newton. Une de ses applications essentielles pour nous sera la recherche du sens de variation d'une fonction.

On connait bien le sens de variation d'une fonction affine : si son coefficient directeur est strictement positif, elle est strictement croissante, sinon elle est strictement décroissante. Si on considère une fonction f plus compliquée, la droite affine tangente à la courbe de f au point $M(x_0, f(x_0)$ réalise une approximation de la courbe. On note $f'(x_0)$ le coefficient directeur de cette tangente. Ainsi, il est intuitif de dire qu'au voisinage de x_0, la fonction f sera strictement croissante si $f'(x_0) > 0$ et strictement décroissante si $f'(x_0) < 0$.

Si l'on est capable de calculer simplement l'ensemble des coefficients $f'(x)$ directeurs des tangentes à la courbe en tout point, une étude du signe de $f'(x)$ nous indiquera sur quels intervalles f croît ou décroît.



L'enjeu de ce chapitre va être de développer les outils qui permettront d'obtenir facilement la fonction dérivée f', telle que pour tout x, $f'(x)$ soit le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point $M(x, f(x))$.

2. Définition et interprétation géométrique

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
• La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est l'ensemble des points $M(x, f(x))$ où $x \in I$. Ainsi : $M(x,y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x)$.
• Le *taux d'accroissement* de f entre $x_0 \in I$ et $x_0 + h \in I$ est le coefficient directeur de la sécante à $\mathcal{C}_f$ aux points $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M_h(x_0+h, f(x_0+h))$: $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.
• La limite en 0 du taux d'accroissement de f entre x_0 et $x_0 + h$ définit, lorsqu'elle existe, le *nombre dérivé* $f'(x_0)$ de f en x_0. La fonction f est alors dite *dérivable* en x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

• Si f est dérivable en tout $x \in I$, la fonction $x \mapsto f'(x)$ est la *dérivée* de f.

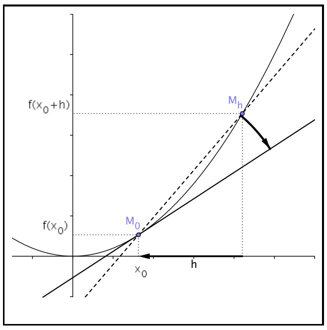
La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $M(x_0, f(x_0))$ est la droite de coefficient directeur $f'(x_0)$ qui passe par $M_0(x_0, f(x_0))$. C'est la limite lorsque h tend vers 0 des sécantes à $\mathcal{C}_f$ en M_0 et M_h. Son équation est

$$T : y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$$

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Alors, on a :
$f(x_0+h) - f(x_0) = (x_0+h)^2 - x_0^2 = h \times (2x_0 + h)$,

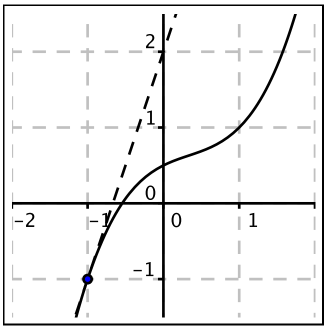
$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x_0 + h = 2x_0$$

donc la dérivée de f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$.



Exemple. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 :

Exemple. Calculer $g'(-1)$ sachant que Δ est la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse -1 :



3. Dérivées des fonctions usuelles et règles de calcul

Propriété. On a :
- $x \mapsto ax+b$ est dérivable sur $D = \mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto a$.
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $D = \mathbb{R} - \{0\}$ de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $D =]0, +\infty[$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Preuve. On calcule les taux d'accroissement en $x \in D$:
- $\dfrac{(a(x+h)+b)-(ax+b)}{h} = \dfrac{ah}{h} = a.$

donc la limite lorsque h tend vers 0 du taux d'accroissement est a.
- $\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \dfrac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h}\dfrac{x-x-h}{hx(x+h)} = -\dfrac{1}{x(x+h)}$

donc la limite lorsque h tend vers 0 du taux d'accroissement est $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \dfrac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \dfrac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

donc la limite lorsque h tend vers 0 du taux d'accroissement est $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. $\square$

Propriété. Soient u et v définies et dérivables sur un intervalle I. Alors
- $u+v$ est dérivable sur I de dérivée $(u+v)' = u'+v'$.
- uv est dérivable sur I de dérivée $(uv)' = u'v+v'u$. (et pas $u'v'$!!!)
- ku est dérivable sur I de dérivée $(ku)' = ku'$. (ou $k \in \mathbb{R}$)

Preuve. Pour tout $x \in I$, on considère le taux d'accroissement de $u+v$ en x :

$$\frac{(u(x+h)+v(x+h))-(u(x)+v(x))}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x)$ et donc la limite du taux d'accroissement est bien $u'(x)+v'(x)$.

Pour tout $x \in I$, on considère le taux d'accroissement de uv en x :

$$\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h} = \frac{u(x+h)(v(x+h)-v(x))}{h} + \frac{v(x)(u(x+h)-u(x))}{h}$$

donc la limite du taux d'accroissement est bien $u(x)v'(x)+v(x)u'(x)$.

On peut appliquer cette formule lorsqu'un terme est constant : $(ku)' = k'u + ku' = 0 + ku' = ku'$. $\square$.

4. Fonctions de références et règles de calcul

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de validité	Condition
$f(x) = k$ $f(x) = x$ $f(x) = x^n$	$f'(x) = 0$ $f'(x) = 1$ $f'(x) = nx^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$	$k \in \mathbb{R}$ $n \geq 1$ entier
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ $f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$x \in]-\infty, 0[$ ou $x \in]0, +\infty[$ $x \in]-\infty, 0[$ ou $x \in]0, +\infty[$	 $n \geq 1$ entier
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in]0, +\infty[$	
$f(x) = \cos(x)$ $f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$ $f'(x) = \cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$	
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$x \in]0, +\infty[$	
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$x \in \mathbb{R}$	

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel. Alors,

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de validité
$f = u + v$	$f' = u' + v'$	I
$f = uv$ $f = ku$	$f' = u'v + v'u$ $f' = ku'$	I
$f = \dfrac{u}{v}$ $f = \dfrac{1}{v}$	$f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ $f' = \dfrac{-v'}{v^2}$	tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de validité	Condition
$f = v \circ u$	$f' = u' \times v' \circ u$	voir 3.	
$f = u^n$	$f' = nu' \times u^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$n > 0$ entier
$f = \dfrac{1}{u}$	$f' = \dfrac{-u'}{u^2}$	x tels que $u(x) \neq 0$	
$f = \dfrac{1}{u^n}$	$f' = -n\dfrac{u'}{u^{n+1}}$	x tels que $u(x) \neq 0$	$n > 0$ entier
$f = \sqrt{u}$	$f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	x tels que $u(x) > 0$	
$f = \ln(u)$	$f' = \dfrac{u'}{u}$	x tels que $u(x) > 0$	
$f = e^u$	$f' = u' \times e^u$	$\mathbb{R}$	
$f = \cos u$	$f' = -u' \times \sin u$	$\mathbb{R}$	
$f = \sin u$	$f' = u' \times \cos u$	$\mathbb{R}$	

5. Dérivées des fonctions composées

Définition. Soient I, J, K trois intevalles et $u : I \to J$, $v : J \to K$ deux fonctions. La *fonction composée* de v et u est la fonction notée $v \circ u$ définie par

$$v \circ u : I \to K, \quad x \overset{u}{\mapsto} u(x) \overset{v}{\mapsto} v(u(x))$$

(on applique d'abord la fonction u à x puis la fonction v à $u(x)$).

Théorème. Soient I, J, K trois intervalles, $u : I \to J$ une fonction dérivable sur I, et $v : J \to K$ une fonction dérivable sur J. Alors la composée $v \circ u$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est

$$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$$

Preuve. On calcule le taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}
\frac{v(u(x+h)) - v(u(x))}{h} &= \frac{v(u(x+h)) - v(u(x))}{h} \times \frac{u(x+h) - u(x)}{u(x+h) - u(x)} \\
&= \frac{v(X+H) - v(X)}{H} \times \frac{u(x+h) - u(x)}{h}
\end{aligned}$$

où $X = u(x)$ et $H = u(x+h) - u(x)$. Lorsque h tend vers 0, le second facteur tend ves $u'(x)$; et H tend vers 0 (par continuité de u) donc le premier facteur tend vers $v'(X) = v'(u(x))$. $\square$

Exemple. Calculer la dérivée de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ ....
....
....
....

6. Applications

Théorème. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$.
- Si $f'(x) > 0$ sur $]a, b[$ alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0$ sur $]a, b[$ alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$.
- Si $f'(x) = 0$ sur $]a, b[$ alors f est constante sur $[a, b]$.

Théorème. Soit f une fonction dérivable sur un intrevalle $]a, b[$.
Si f admet un extremum local en $c \in I$ (c'est-à-dire un maximum ou un minimum de la fonction au voisinage de c), alors $f'(c) = 0$ et la courbe représentative de f admet une tangente horizontale en $(c, f(c))$.

⚠ La réciproque est fausse : pour $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$, et pourtant 0 n'est ni maximum ni minimum local de f.

5. Méthodes d'étude du signe d'une dérivée

Pour dresser un tableau de signe de $f'(x)$, on utilise une forme **factorisée** $f'(x)$. On étudie sur des lignes séparées le signe de chacun des facteurs du numérateur et du dénominateur. On n'oublie pas les doubles barres pour matérialiser les valeurs interdites.

⚠ La règle des signes n'a de sens que pour les produits ou les quotients. On ne fait pas de tableau de signes pour les sommes ! ! (on ne peut déduire, par exemple, le signe de $x^3 + x^2 + x - 1$ du signe de x^3 et de celui de $x^2 + x - 1$. Il faut trouver un moyen de factoriser cette expression).

⚠ Seul le signe de la dérivée f' renseigne sur les variations de f. Étudier le signe de f n'apporte aucune indication sur ses variations.

• On commence par *factoriser* au maximum la dérivée. Surtout, on ne développe pas dénominateur de la dérivée d'un quotient (qui est un carré, donc positif).

• Si un facteur est un carré (exemple $(x-8)^2$), une racine carrée (exemple $\sqrt{3x-1}$) ou une exponentielle (exemple e^{1-x}), son signe est toujours positif.

• Si un facteur est une fonction affine du type $ax + b$, son signe est donné par :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-signe(a)$	0	$signe(a)$	

• Si un facteur est un trinôme du type $ax^2 + bx + c$, son signe est donné par :

$\Delta > 0$,
Racines :
$x_1 < x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		$signe(a)$	0	$-signe(a)$	0	$signe(a)$	

$\Delta = 0$,

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
ax^2+bx+c		$signe(a)$	0	$signe(a)$	

$\Delta < 0$,

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		$signe(a)$	

• Si un facteur est une fonction $g(x)$ dont on a étudié le signe auparavant, on utilise les résultats précédents pour conclure !