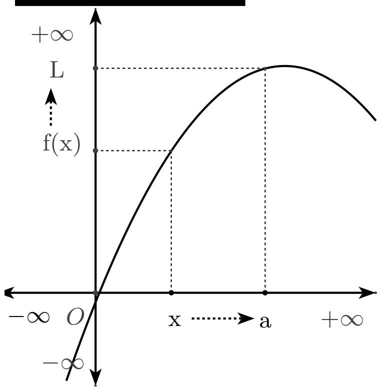
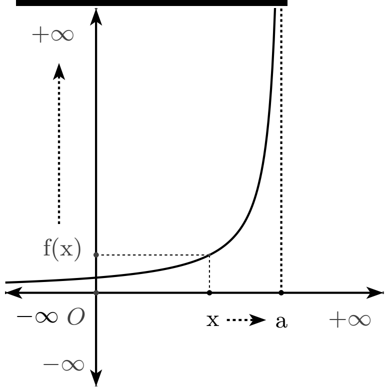
Chapitre 3 : Limites -01-10-10-
Terminale ES 1, 2010-2011, Y. Angeli

1. Notion de limite

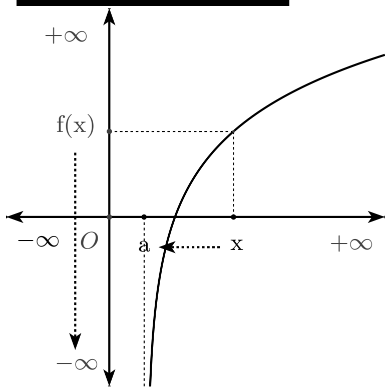
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$



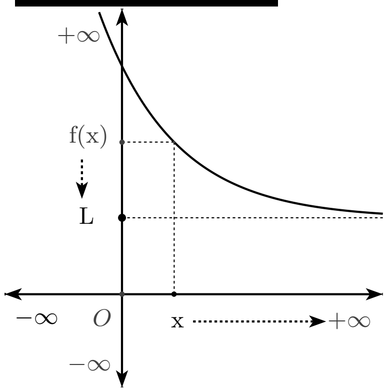
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$



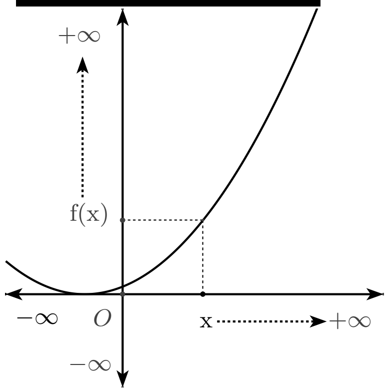
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$



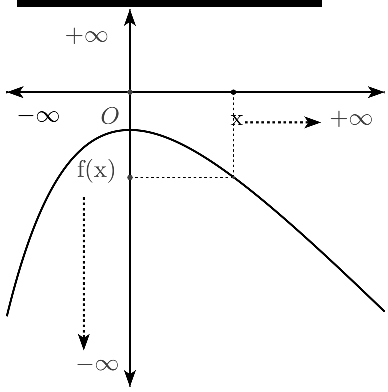
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$



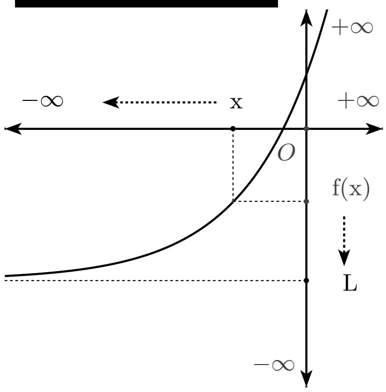
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



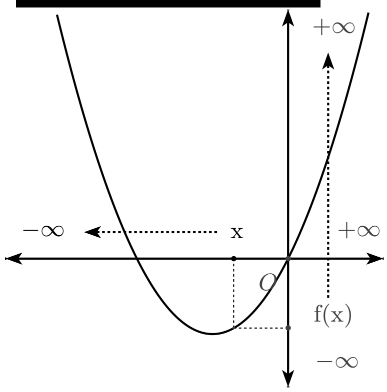
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



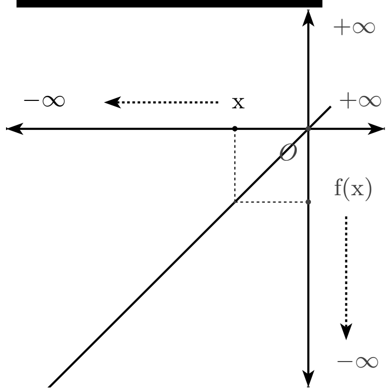
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



La notation $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se lit : la *limite* de $f(x)$ lorsque x tend vers a est L. Les symboles L et a peuvent être des nombres réels ou *moins l'infini* ($-\infty$) ou *plus l'infini* ($+\infty$).

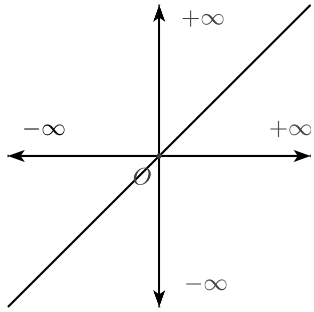
Remarque. L'infini et moins l'infini ne sont pas des nombres, mais désignent des direction. Dire que x tend vers $+\infty$ signifie que le nombre x prend des valeurs positives réelles arbitrairement grandes.
⚠ En particulier, on n'écrit jamais d'opération faisant intervenir $+\infty$ ou $-\infty$: $+\infty + 0 = +\infty$ n'a aucun sens.

Définition. (interprétation géométrique de certaines limites)
• Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$, on dit que la courbe représentative de f admet pour *asymptote horizontale* en $+\infty$ la droite d'équation $y = L$. On définit de même l'asymptote horizontale en $-\infty$. (voir les deux figures du bas de la premières colonne.)
• Si $\lim\limits_{x \to a, x > a} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a, x < a} f(x)$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que la courbe représentative de f admet pour *asymptote verticale* la droite d'équation $x = a$. (voir les deux figures de droite de la première ligne.)
• Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, on dit que la courbe représentative de f admet pour *asymptote oblique* en $+\infty$ la droite d'équation $y = ax + b$. Une asymptote oblique en $-\infty$ est définie de façon analogue. (voir par exemple la dernière figure de la seconde ligne).

Exemple. L'hyperbole qui représente la fonction inverse admet deux asymptotes. Lesquelles ? ....
....
....
....
....
....
....

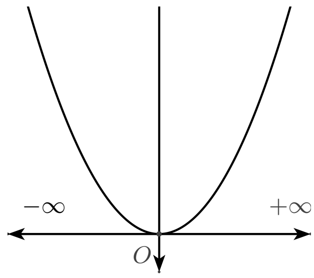
Exemple. Montrer que la droite d'équation $y = 1 - x$ est asymptote à la courbe représentative de $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 - x + \dfrac{1}{x}$. ....
....
....
....
....
....

2. Les fonctions usuelles : rappels et limites



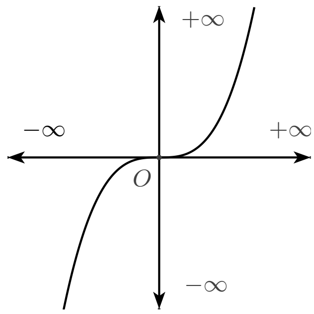
Fonction identité $x \mapsto x$
Définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 1$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$



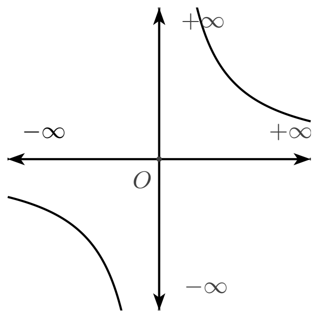
Fonction carré $x \mapsto x^2$
Définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 2x$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$



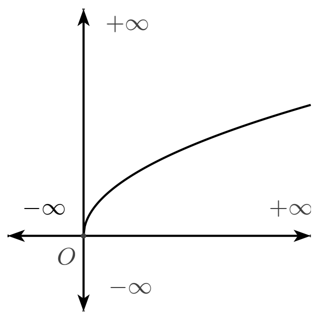
Fonction cube $x \mapsto x^3$
Définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 3x^2$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to x_0} x^3 = x_0^3$



Fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$
Définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$. Dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ • $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x_0}$
- $\lim\limits_{x \to 0, x<0} \dfrac{1}{x} = -\infty$ • $\lim\limits_{x \to 0, x>0} \dfrac{1}{x} = +\infty$



Fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$
Définie, continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

3. Limite d'une somme

Propriété. La limite de la somme $f+g$ en fonction de la limite de f et de la limite de g en $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ est donnée par le tableau suivant :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$
$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	??

Exemple.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} + x^3 =$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to 0, x<0} \frac{1}{x} + x + 1 =$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0, x<0} \frac{1}{x} = \\ \lim\limits_{x\to 0, x<0} x + 1 = \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} + 3 =$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 3 = \end{cases}$

Remarque. La dernière ligne du tableau est une forme indeterminée. Tous les cas de figure peuvent se produire, comme en témoignent les exemples suivants :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x + 7 = \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x = \end{array}\right\} \quad \text{mais } \lim\limits_{x\to+\infty} (x+7) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \qquad =$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x = \end{array}\right\} \quad \text{mais } \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x =$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x = \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = \end{array}\right\} \quad \text{mais } \lim\limits_{x\to+\infty} x - x^2 =$$

On pourra utiliser $\lim\limits_{x\to+\infty} ax^2 + bx + c = \begin{cases} +\infty \ \textit{si } a > 0 \\ -\infty \ \textit{si } a < 0 \end{cases}$.

4. Limite d'un produit

Propriété. La limite du produit $f \times g$ en fonction de la limite de f et de la limite de g en $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ est donnée par le tableau suivant :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\lim\limits_{x \to a}(f(x) \times g(x))$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell \times \ell'$
$\ell > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0	$\pm\infty$	??

Exemple.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 \times x^3 =$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-2 + \dfrac{1}{x}\right) x =$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -2 + \dfrac{1}{x} = \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{2}{x^2} =$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -2 = \end{cases}$

Remarque. La dernière ligne du tableau est une forme indeterminée. Tous les cas de figure peuvent se produire, comme en témoignent les exemples suivants :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \qquad = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \qquad = -\infty \end{array}\right\} \text{mais } \lim\limits_{x \to +\infty} \qquad = \lim\limits_{x \to +\infty} \qquad = 7$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \qquad = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \qquad = -\infty \end{array}\right\} \text{mais } \lim\limits_{x \to +\infty} \qquad = \lim\limits_{x \to +\infty} \qquad = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \qquad = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \qquad = -\infty \end{array}\right\} \text{mais } \lim\limits_{x \to +\infty} \qquad = \lim\limits_{x \to +\infty} \qquad = 0$$

5. Limite de l'inverse d'une fonction

Propriété. La limite de l'inverse $\frac{1}{f}$, fonction de la limite de f en $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ est donnée par le tableau suivant :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\ell}$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
0 en restant > 0	$+\infty$
0 en restant < 0	$-\infty$

Exemple. • $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} =$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} =$

• La limite $\lim\limits_{x\to 2, x<2} \frac{1}{2-x}$ dépend du signe de $2-x$ car $\lim\limits_{x\to 2} 2-x = 0$.

Or on a :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	

,

Donc si $x < 2$, on a $2-x > 0$, d'où $\lim\limits_{x\to 2, x<2} \frac{1}{2-x} = +\infty$.

Remarque. Signes à savoir : Le signe d'une fonction affine $x \mapsto ax+b$ est donné par :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-signe(a)$	0	$signe(a)$	

Le signe d'un trinôme $x \mapsto ax^2+bx+c$ est donné par :

$\Delta > 0$,
Racines :
$x_1 < x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		$signe(a)$	0	$-signe(a)$	0	$signe(a)$	

$\Delta = 0$,

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
ax^2+bx+c		$signe(a)$	0	$signe(a)$	

$\Delta < 0$,

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		$signe(a)$	

6. Lever les formes indéterminées

Les formes indéterminées sont celles que les tableaux sur les opérations de limites ne peuvent trancher, c'est-à-dire "$\infty - \infty$", "$\infty \times 0$", "$\frac{\infty}{\infty}$" et "$\frac{0}{0}$". Dans cette situation, il faut trouver un autre argument.

Théorème. La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que la limite de son terme de plus haut degré. De même, la limite du quotient de deux polynômes en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que celle du quotient de leurs termes de plus haut degré.

Exemple. $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 + x + 7 = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$ par théorème.

Exemple. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 + 3x^4 - 5x + 4$ ....
....

Exemple. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3-x}{2x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x}{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ par théorème.

Exemple. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x+1}{x^2+x+1}$ ....
....
....

⚠ Le théorème du plus haut degré ne s'applique que lorsqu'on recherche une limite en $+\infty$ ou $-\infty$.

⚠ Le théorème pour les quotients de deux polynômes s'applique en trois temps : d'abord on écrit que la limite du quotient des polynômes égale la limite du quotient de leurs termes de plus haut degré, puis on simplifie le quotient des termes de plus haut degré et enfin on calcule sa limite. Rater une des étapes empêche de poursuivre le raisonnement.

Remarque. Une autre méthode pour lever les formes indéterminées consiste à utiliser une autre écriture de la fonction. Souvent, l'énoncé d'un problème propose plusieurs écritures d'une même fonction et il faut prendre soin de choisir la plus adaptée.

Exemple. Montrer que pour $x \neq 1$, $\frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}$. En déduire $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-x}{1-x^2}$...
....
....
....

7. Limite d'une fonction dont le dénominateur tend vers 0

Propriété. Pour étudier $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{u(x)}{v(x)}$, lorsque $\lim\limits_{x \to a} u(x) \neq 0$ et $\lim\limits_{x \to a} v(x) = 0$, on dresse le tableau de signes de $\dfrac{u(x)}{v(x)}$. Si le signe est positif, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{u(x)}{v(x)} = +\infty$, s'il est négatif, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{u(x)}{v(x)} = -\infty$

Exemple. $\lim\limits_{x \to 1, x > 1} \dfrac{x}{1 - x^2}$:
on a $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} 1 - x^2 = 0$. On dresse donc un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1 - x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x}{1 - x^2}$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$\ominus$	

donc $\lim\limits_{x \to 1, x > 1} \dfrac{x}{1 - x^2} = -\infty$.

8. Composées de fonctions

Définition. La composée de la fonction f et de la fonction g est la fonction notée $f \circ g$ définie par $f \circ g(x) = f(g(x))$.

Propriété. Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, $\quad \lim\limits_{X \to b} f(X) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = c$.

Exemple. Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1 - x}$:
on a $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - x = +\infty$, or $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1 - x} = +\infty$.

9. Théorème d'encadrement

Théorème. Soient f et g et h trois fonctions, $a, \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$ et $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ sur un intervalle voisin de a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

Remarque. Si $\ell = +\infty$, la fonction h n'est pas nécessaire. Si $\ell = -\infty$, la fonction g n'est pas nécessaire.

Exemple. Si $f(x) \geq x^2$ sur $\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.