

---

FEUILLE D'EXERCICES V - 15.10.09 -  
LIMITES - FONCTIONS  
Terminale ES 1, Lycée Newton, Y. Angeli

---

EXERCICE 1.

Soit la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$ .

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Quel est le plus grand ensemble de définition  $\mathcal{D}$  possible pour  $f$  ?
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
3. La courbe  $\mathcal{C}_f$  admet-elle des asymptotes verticales ? Des asymptotes horizontales ?
4. Montrer que la droite  $\mathcal{A}$  d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
5. Déterminer, en fonction de  $x$ , le signe de  $f(x) - x$ . En déduire la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  et de son asymptote  $\mathcal{A}$ .
6. Soit  $g : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x$ ,  $f(x) \leq g(x) \leq x$ . Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$  et démontrer que  $\mathcal{A}$  est asymptote à la courbe représentative de  $g$ .
7. Étudier le signe de  $x^4 + 4x^2 - 1$  en fonction de  $x$ . (on pourra poser  $X = x^2$ ).
8. Montrer que

$$f'(x) = \frac{x^4 + 4x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

9. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
10. Tracer l'allure de  $\mathcal{C}$ .

EXERCICE 2.

Soit  $g$  une fonction continue strictement positive définie sur  $]1; +\infty[$  dont la courbe possède une asymptote verticale.

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et strictement croissante, dont la courbe admet en  $-\infty$  une asymptote horizontale d'équation  $y = 1$ .

1. Quel est l'ensemble de définition maximal de  $x \mapsto g(f(x))$  ?
2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(g(x))$ .
3. Trouver un exemple de fonction  $f$  et  $g$  satisfaisant à ces hypothèses.