∽ Baccalauréat ES Amérique du Nord 31 mai 2006 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Questionnaire à choix multiples

Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte. On demande d'indiquer la réponse exacte en cochant sans justification la grille réponse jointe en annexe. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 point *; l'absence de réponse donne* 0 *point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à* 0.

Questions		Réponses		
Q1	Si $a \in]0\ ;\ 1[$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x$ est égale à :	0	$+\infty$	$-\infty$
Q2	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto x\text{e}^{x^2}$ est :	$x \longmapsto \text{e}^{x^2}$	$x \longmapsto 2\text{e}^{x^2}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2}\text{e}^{x^2}$
Q3	La dérivée sur $]0\ ;\ +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto x\ln x$ est :	$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln x$	$x \longmapsto \ln x + 1$
Q4	$\text{e}^{-2\ln 5}$ est égal à :	$\dfrac{1}{25}$	-25	$\dfrac{5}{2}$
Q5	L'équation $\text{e}^x = \dfrac{16}{\text{e}^x}$ admet sur $\mathbb{R}$	Aucune solution	Une solution	Deux solutions
Q6	L'ensemble des solutions de l'inéquation $x\ln(0,2) - 5 \geqslant 0$ est :	$\left[\frac{5}{\ln 0,2}\ ;\ 0\right[$	$\left]-\infty\ ;\ \frac{5}{\ln 0,2}\right]$	$\left[\frac{5}{\ln 0,2}\ ;\ +\infty\right[$

Dans les questions 7, 8, 9 et 10, A et B sont deux évènements d'un univers tels que $P(\text{A}) = 0,4$, $P(\text{B}) = 0,3$ et $P(\text{A} \cap \text{B}) = 0,2$.

Q7	$P(\text{A} \cup \text{B}) =$	0,1	0,5	0,7
Q8	$P\left(\text{A} \cap \overline{\text{B}}\right) =$	0,1	0,2	0,4
Q9	$P\left(\overline{\text{A} \cap \text{B}}\right) =$	0,3	0,5	0,8
Q10	$P_{\text{A}}(\text{B}) =$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{4}$

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité

Tous les résultats de cet exercice seront arrondis à 10^{-2} *près.*

Un site touristique dont le billet d'entrée coûte 4 € propose deux possibilités de visite, une visite à pied sans frais supplémentaire ou une visite en car avec frais supplémentaires de 3 € par personne.

Une buvette est installée sur le site. On y vend un seul type de boisson au prix de 2 € l'unité.

On suppose qu'à la buvette un touriste achète au plus une boisson.

Un touriste visite le site. On a établi que :

- la probabilité pour qu'il visite à pied est 0,3 ;

- la probabilité qu'il visite à pied et achète une boisson est 0,18 ;
- la probabilité qu'il achète une boisson sachant qu'il visite en car est 0,8.

On note :

- C l'évènement : « le touriste visite en car » ;
- B l'évènement : « le touriste achète une boisson ».

1. Donner $p\left(\overline{\text{C}} \cap \text{B}\right)$ et $p\left(\overline{\text{C}}\right)$.

2. Le touriste visite à pied. Quelle est la probabilité qu'il achète une boisson ?

3. **a.** Montrer que $p(\text{B}) = 0,74$.

b. En déduire la recette moyenne prévisible de la buvette lors d'une journée où 1 000 touristes sont attendus sur le site.

4. On appelle d la dépense (entrée, transport éventuel, boisson éventuelle) associée à la visite du touriste.

a. Quelles sont les valeurs possibles de d ?

b. Établir la loi de probabilité de d. On présentera le résultat dans un tableau.

c. Calculer l'espérance mathématique de cette loi. Quelle interprétation peut-on en donner ?

EXERCICE 2 — 5 points

Pour les candidats suivant l'enseignement de spécialité

Dans une entreprise, lors d'un mouvement social, le personnel est amené à se prononcer chaque jour sur l'opportunité ou non du déclenchement d'une grève.

Le premier jour, 15 % du personnel souhaite le déclenchement d'une grève. À partir de ce jour-là :

- parmi ceux qui souhaitent le déclenchement d'une grève un certain jour, 35 % changent d'avis le lendemain.
- parmi ceux qui ne souhaitent pas le déclenchement d'une grève un certain jour, 33 % changent d'avis le lendemain.

On note :

- g_n la probabilité qu'un membre du personnel souhaite le déclenchement d'une grève le jour n,
- t_n la probabilité qu'un membre du personnel ne souhaite pas le déclenchement d'une grève le jour n,
- $P_n = \begin{pmatrix} g_n & t_n \end{pmatrix}$, la matrice qui traduit l'état probabiliste au n-ième jour.

1. Déterminer l'état initial P_1.

2. **a.** Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.

b. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.

3. Calculer le pourcentage de personnes favorables à la grève le 3^{e} jour.

4. Soit $P = (x \quad y)$ l'état probabiliste stable (on rappelle que $x + y = 1$).

a. Montrer que x et y vérifient l'équation $x = 0,65x + 0,33y$.

b. Déterminer x et y (on arrondira les résultats à 10^{-3} près).

c. Interpréter le résultat.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Tous les résultats numériques seront arrondis à l'unité près sauf indication contraire.

Une machine est achetée 3 000 euros.

Le prix de revente y, exprimé en euros, est donné en fonction du nombre x d'années d'utilisation par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	3 000	2 400	1 920	1 536	1 229	983

A Ajustement affine

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal du plan. Les unités graphiques seront de 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 200 euros sur l'axe des ordonnées.
2. Calculer le pourcentage de dépréciation du prix de revente après les trois premières années d'utilisation.
3. Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés. Donner une équation de la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Représenter la droite dans le repère précédent.

B Ajustement non affine
On pose $z = \ln(y)$ et on admet qu'une équation de la droite de régression de z en x est donnée par : $z = -0,22x + 8,01$.

1. Déterminer une expression de y en fonction de x de la forme $y = A^x \times B$ où A est un réel arrondi au centième près et B est un réel arrondi à l'unité près.
2. En admettant que $y = 0,80^x \times 3\ 011$, déterminer après combien d'années d'utilisation le prix de revente devient inférieur ou égal à 500 euros.

C Comparaison des ajustements
Après 6 années d'utilisation le prix de revente d'une machine est de 780 euros. Des deux ajustements précédents, quel est celui qui semble le mieux estimer le prix de revente après 6 années d'utilisation ? On argumentera la réponse.

EXERCICE 4 — 5 points

Commun à tous les candidats
Soit une fonction r définie sur $[0\ ;\ 12]$ par $r(x) = (900x)\mathrm{e}^{-0,1(x-2)}$.

A Étude d'une fonction f

1. On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ 12]$ par $f(x) = \ln[r(x)]$.
   Démontrer que $f(x) = \ln(900) + \ln x - 0,1(x-2)$.
2. On note f' la fonction dérivée de f ; démontrer que $f'(x) = \dfrac{10-x}{10x}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x de $]0\ ;12]$ puis dresser le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ 12]$.
4. On désigne par r' la fonction dérivée de r ; exprimer f' en fonction de r' et de r puis justifier que $r'(x)$ et $f'(x)$ ont le même signe pour tout x de $]0\ ;\ 12]$.
5. En déduire les variations de r sur $]0\ ;\ 12]$.
6. Déterminer pour quelle valeur x_0 la fonction r atteint un maximum et calculer x_0 arrondi à l'unité près.

B Calcul de la valeur moyenne

1. Démontrer que la fonction R définie par $R(x) = -9\ 000(x+10)\mathrm{e}^{-0,1(x-2)}$ est une primitive de la fonction r sur $[0\ ;\ 12]$.
2. Calculer la valeur moyenne r_m de la fonction r sur $[0\ ;\ 12]$ définie par

$$r_m = \frac{1}{12}\int_0^{12} r(x)\,\mathrm{d}x.$$

   On donnera d'abord la valeur exacte et ensuite une valeur arrondie à 10^{-2} près.

Annexe- Document réponse à rendre avec la copie

Exercice 1 : questionnaire à choix multiples

Questions		Réponses		
Q1	Si $a \in]0~;~1[$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} a^x$ est égale à :	0	$+\infty$	$-\infty$
		☐	☐	☐
Q2	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto x\mathrm{e}^{x^2}$ est :	$x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$	$x \longmapsto 2\mathrm{e}^{x^2}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$
		☐	☐	☐
Q3	La dérivée sur $]0~;~+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto x\ln x$ est :	$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln x$	$x \longmapsto \ln x + 1$
		☐	☐	☐
Q4	$\mathrm{e}^{-2\ln 5}$ est égal à :	$\dfrac{1}{25}$	-25	$\dfrac{5}{2}$
		☐	☐	☐
Q5	L'équation $\mathrm{e}^x = \dfrac{16}{\mathrm{e}^x}$ admet sur $\mathbb{R}$	Aucune solution	Une solution	Deux solutions
		☐	☐	☐
Q6	L'ensemble des solutions de l'inéquation $x\ln(0,2) - 5 \geqslant 0$ est :	$\left[\frac{5}{\ln 0,2}~;~0\right[$	$\left]-\infty~;~\frac{5}{\ln 0,2}\right]$	$\left[\frac{5}{\ln 0,2}~;~+\infty\right[$
		☐	☐	☐

Dans les questions 7, 8, 9 et 10, A et B sont deux évènements d'un univers tels que $P(\mathrm{A}) = 0,4$, $P(\mathrm{B}) = 0,3$ et $P(\mathrm{AC} \cap \mathrm{B}) = 0,2$.

Q7	$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) =$	0,1	0,5	0,7
		☐	☐	☐
Q8	$P\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}\right) =$	0,1	0,2	0,4
		☐	☐	☐
Q9	$P\left(\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}\right) =$	0,3	0,5	0,8
		☐	☐	☐
Q10	$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) =$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{4}$
		☐	☐	☐