
FEUILLE D'EXERCICES 14 - 10.02.09 -
EXTRAIT DU SUJET POLYNÉSIE JUIN 2009
Terminale ES 1, Lycée Newton, Y. Angeli

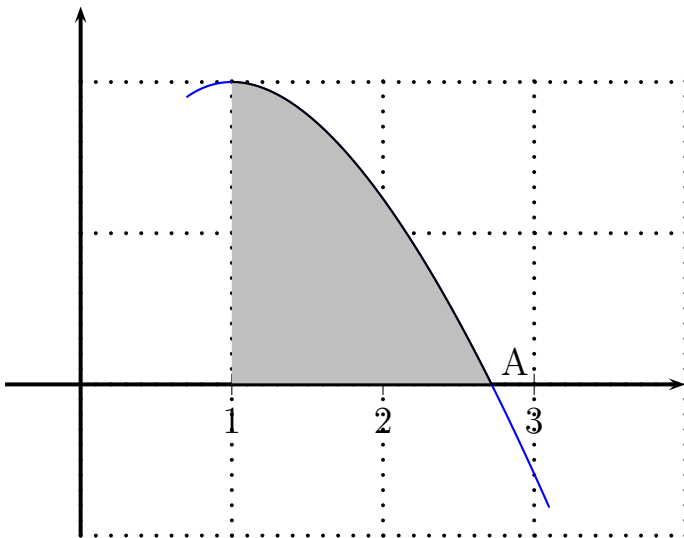
Le plan est rapporté à un repère orthogonal.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 2x(1 - \ln x).$$

On appelle \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f .

1.
 - a. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 0 (on rappelle que la limite en 0 de la fonction u définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $u(x) = x \ln x$ est 0).
 - b. Déterminer $f'(x)$ pour $x \in]0 ; +\infty[$ (où f' est la fonction dérivée de f).
 - c. Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0 ; +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
2. Résoudre sur $]0 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. En déduire que la courbe \mathcal{C} admet un unique point d'intersection A avec l'axe des abscisses et donner les coordonnées du point A .
3.
 - a. Résoudre, par un calcul, l'inéquation $f(x) \geq 0$ dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$. Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} ?
 - b. Montrer que la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = x^2 \left(\frac{3}{2} - \ln x \right)$ est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.
 - c. On désigne par \mathcal{D} le domaine délimité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.



Calculer en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire de \mathcal{D} puis, en donner