
DEVOIR MAISON 6 - 16.03.10 -
Terminale ES 1, Lycée Newton, Y. Angeli

PROBLÈME. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité $0,5\text{cm}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Dresser le tableau de signes de f .
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
5. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
6. Quelles asymptotes la courbe \mathcal{C} admet-elle ?
7. Montrer que $f'(x) = -\frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2}$.
8. Donner l'équation de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse e .
9. Dresser le tableau de variations de f .
10. En remarquant que $f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$, donner une primitive de f .
11. Calculer la valeur moyenne $V(t)$ de f sur l'intervalle $[e, t]$.
12. Montrer que pour tout $t > 0$ $V(t) = \frac{\ln(\ln t)}{\ln t} \times \frac{\ln t}{t} \times \frac{t}{t - e}$.
13. En déduire la limite de V lorsque t tend vers $+\infty$.