
DEVOIR 4 - 02.12.08 -
Terminale ES 1, Lycée Newton, Y. Angeli

INTRODUCTION

On peut observer, le long de la côte atlantique d'Amérique du Nord, des corneilles dont les habitudes alimentaires sont un peu particulières : leur met favori est un gros mollusque dont il faut briser la solide coquille pour pouvoir le manger.

La corneille utilise la technique suivante pour pouvoir parvenir à ses fins : elle emmène sa proie dans les airs, la laisse tomber sur le sol, redescend la chercher, et ce, autant de fois qu'il est nécessaire pour que la coquille casse enfin.

Un zoologiste américain intrigué par ce comportement a remarqué lors de ses observations que la plupart des oiseaux laissent choir leur proie d'une hauteur d'environ 5 mètres. Pourquoi 5 mètres ? Cette altitude correspondrait-elle à une hauteur optimale, c'est-à-dire une hauteur telle que le travail de l'oiseau soit minimum ?

Nous allons utiliser les observations du zoologiste pour déterminer si oui ou non les corneilles semblent avoir intégré un processus d'optimisation dans le comportement.

MODÈLE MATHÉMATIQUE

Supposons que l'oiseau laisse tomber sa proie à l'altitude x et qu'il doive recommencer cette opération n fois pour que la coquille casse. On peut considérer que le travail de l'oiseau est proportionnel à x et n donc à $T = xn$.

Par ailleurs, il est logique de penser qu'une coquille casse d'autant plus vite qu'elle tombe de haut, c'est-à-dire que n est une fonction qui dépend de x .

Il en résulte que T est une fonction de x dont on se demande si elle est minimum lorsque x vaut environ 5 mètres.

Utilisant un stock important de coquilles de même grandeur, le zoologiste a simulé leur chute en laboratoire.

Voici le résultat de ses observations (x_i désigne la hauteur de la chute en mètres, et n_i le nombre moyen de jets pour briser la coquille) :

| | | | | | | | | | |
|-------|----|----|-----|---|---|---|---|----|-----|
| x_i | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 15 |
| n_i | 55 | 10 | 7.5 | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2.5 |

On veut définir une fonction d'ajustement qui réponde aux contraintes :

A. : Plus l'altitude x est élevé, moins il faut de tentatives $n(x)$ pour briser une coquille.

B. : Pour casser une coquille, il faut la faire tomber au moins une fois. Pour qu'elle tombe au bout d'une chute, il faut monter suffisamment haut.

C. : La coquille casse d'autant moins vite qu'elle tombe de moins haut. Il existe une altitude minimale x_0 tellement petite que la coquille ne peut casser. On introduit donc une fonction définie pour $x \in]x_0, +\infty[$ par

$n(x) = 1 + \frac{c}{x - x_0}$ où x_0 et c sont deux réels fixés strictement positifs.

1. Représenter le nuage de points des $M_i(x_i, n_i)$. Un ajustement affine du nuage vous semble-t-il pertinent ? Pourquoi ?

2. Tracer à main levée une courbe simple réalisant un ajustement du nuage.

3. Calculer la limite de n en $+\infty$, et interpréter cette limite en terme d'asymptote. Des conditions A, B ou C , à laquelle correspond ce résultat ?

4. Calculer la limite de n en x_0^+ , et interpréter cette limite en terme d'asymptote. Des conditions A, B ou C , à laquelle correspond ce résultat ?

5. Calculer la dérivée de n et dresser son tableau de variation. Des conditions A, B ou C , à laquelle correspond ce résultat ?

6. On pose $y(x) = \frac{1}{n(x) - 1}$. Montrer que $y(x) = \frac{1}{n(x) - 1} = \frac{1}{c}x - \frac{1}{c}x_0$.

7. On pose $y_i = \frac{1}{n_i - 1}$. Calculer les y_i et reporter leurs valeurs dans un tableau. Représenter dans un second graphique le nuage des points $M'_i(x_i, y_i)$.

8. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage des M'_i et placer ce point sur la seconde figure.

9. Donner avec une précision de 10^{-2} les coefficients de l'équation $y = ax + b$ de la droite d'ajustement des moindres carrés (d) pour le nuage des M'_i . Tracer cette droite. Calculer la somme S des carrés des résidus correspondant à cet ajustement. Sans la calculer, comparer la somme S' des carrés des résidus d'un ajustement par la droite $(M'_1M'_9)$ avec S .

10. Dédurre de $y(x) = ax + b$ et de la question 6 le coefficient c et l'altitude minimale x_0 nécessaire à casser une coquille. Expliciter $n(x)$. Estimer le nombre de jets moyens requis pour briser une coquille à une altitude de 12m.

11. Donner une expression de la fonction $T(x) = xn(x)$. Montrer que

$$T'(x) = \frac{x^2 - 2x - 19}{(x - 1)^2}$$

Dresser le tableau de variation de T . Pour quelle altitude x le travail T est-il minimum ? Quel est alors le nombre moyen de jets pour briser une coquille ? Conclure.