Devoir Maison 2 pour le 20.10.09
Terminale ES 1, Lycée Newton, Y. Angeli

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

1. Déterminer le plus grand ensemble de définition $\mathcal{D}$ possible de f.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. La courbe représentative de f admet-elle une asymptote horizontale en $+\infty$?
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Interpréter géométriquement ce résultat.
4. Montrer que la droite $\mathcal{A}$ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.
5. Démontrer que si $x \in \mathcal{D}$, alors $-x \in \mathcal{D}$, puis que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $-f(-x) = f(x)$. La fonction f est dite *impaire*, et sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.
6. Déduire de ce qui précède : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ et le fait que la courbe de f admet la droite d'équation $y = x$ comme asymptote oblique en $-\infty$.
7. La courbe de f admet-elle des aysmptotes verticales ? Si oui, lesquelles ?
8. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$.
9. Dresser le tableau de variation de f.
10. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α unique sur l'intervalle $]-0,9;0[$.
11. Démontrer que α est la seule solution de $f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$.
12. Donner un encadrement de α à 10^{-3} près.
13. En déduire que $f(x) = -1$ admet une solution α' unique sur $\mathbb{R}$ et donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α'.
14. Recopier et remplir le tableau suivant :

x	0	$0,5$	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x)$								

15. Représenter la courbe de f et ses asymptotes dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, pour $x \in [-5;5]$ et $y \in [-6;6]$