Devoir Commun : 3 heures -27.01.10-
Terminales ES - Lycée Newton - Y. Angeli et L. Arab

Exercice 1

Soient $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x^3 + 2x^2 + x + 4}{(x+1)^2}$, et $\mathcal{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé d'unité $0,5$cm.

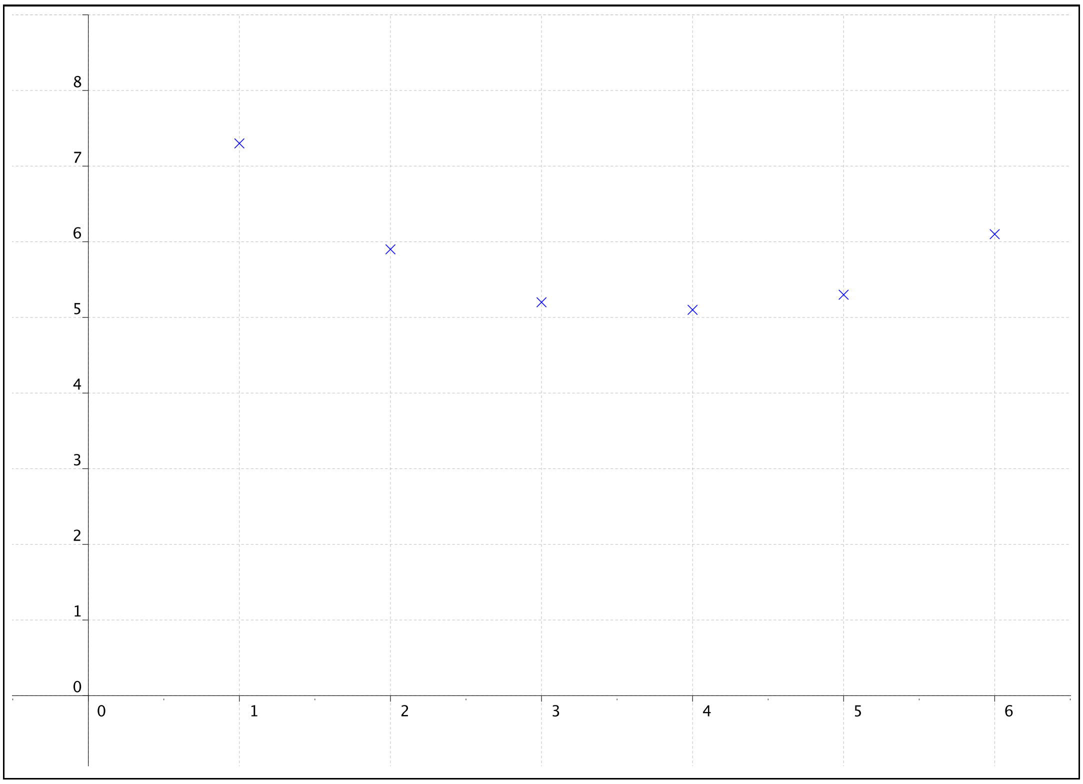
1. Limites.
   (a) Calculer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
   (b) Calculer la limite de f en -1.
2. Asymptotes
   (a) Montrer que pour tout $x \neq -1$, $f(x) = x + \dfrac{4}{(x+1)^2}$.
   (b) Montrer que Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et $-\infty$.
   (c) Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.
   (d) La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle d'autres asymptotes ?
3. Variations et tangentes.
   (a) Montrer que pour tout $x \neq -1$, $f'(x) = \dfrac{(x^2-1)(x^2+4x+7)}{(x+1)^4}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
   (c) Donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   (d) Donner l'équation de la tangente T' à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
4. Intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.
   (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $\alpha \in]-3;-2[$.
   (b) Montrer que α est la seule solution de $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.
   (c) Donner un encadrement de α d'amplitude $0,01$.
5. Représenter les asymptotes, les tangentes, et la courbe $\mathcal{C}$.
6. Aire entre la courbe et son asymptote.
   (a) Donner une primitive de la fonction $g :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{4}{(x+1)^2}$
   (b) Calculer $\displaystyle\int_1^t g(x)dx$.
   (c) Soit $t > 1$. Exprimer par une intégrale l'aire $\mathcal{A}(t)$ de la surface composée des points situés entre $\mathcal{C}$ et Δ et d'abscisses comprises entre 1 et t.
   (d) Calculer $\mathcal{A} = \lim\limits_{t \to +\infty} \mathcal{A}(t)$. Hachurer sur le graphique la surface dont on vient de calculer l'aire.

Exercice 2. (Sujet Antilles-Guyane, série ES, septembre 1997)

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de touristes (en dizaine de milliers) d'un département français entre 1991 et 1996.

Année	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6
$t_i = (x_i - 4)^2$						
Nombre y_i de touristes	7,3	5,9	5,2	5,1	5,3	6,1

Le nuage de points associé à cette série est donné sur le graphique suivant :



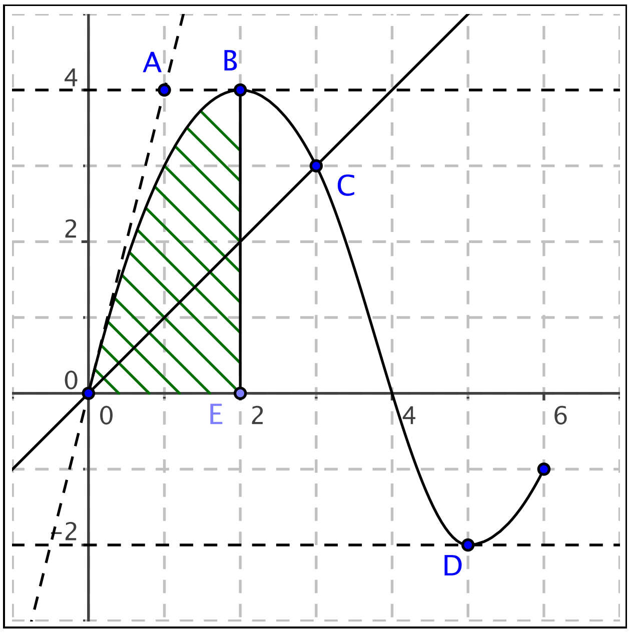
1. Le nuage semble-t-il justifier un ajustement affine ?
2. Afin d'effectuer un ajustement à l'aide d'une parabole, on effectue le changement de variable suivant : $t_i = (x_i - 4)^2$. Recopier le tableau et remplir la ligne des t_i.
3. Déterminer les coefficients m et p de l'équation $y = mt + p$ de la droite de régression de y en t. On donnera les résultats à 10^{-2} près par excès.
4. Si la tendance ne change pas, effectuer une prévision pour 1998.
5. À l'aide de l'équation obtenue à la question 3, trouver un ajustement de la forme $y = ax^2 + bx + c$.

Exercice 3. : inspiré du sujet de Bac série ES, Liban, juin 2005

Exercice reservé aux élèves qui ne suivent pas l'option mathématique.

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 6]$ dans un repère d'unité graphique 1cm.

- (OA) est tangente en A à $\mathcal{C}$.
- le point C est l'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec la droite d'équation $y = x$.
- $\mathcal{S}$ est la surface hachurée.



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Donner le tableau de variation de f sur $[0; 6]$.
2. Donner l'équation réduite de (OA). Que vaut $f'(0)$?
3. Résoudre l'inéquation $f(x) = 0$. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$.
4. Donner les coordonnées de C. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq x$.
5. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en D.
6. On rappelle que l'aire d'un trapèze est $\frac{1}{2}(B+b) \times h$ où B est la plus grande base, b la plus petite base et h la hauteur du trapèze. Donner l'aire du trapèze $AOBE$ et celle du triangle OBE.
7. Donner un encadrement d'amplitude 2 et une interprétation du nombre $\int_0^2 f(x)dx$.

Exercice 3 **5 points**

POUR LES CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Lors de sa création au 1er janvier 2000, un club de sport a 300 adhérents. À la fin de la première année, trois quarts des adhérents se réinscrivent et 120 nouveaux membres adhèrent.

Pour tout nombre entier naturel n, on appelle a_n le nombre d'adhérents du club, exprimé en centaines, n années après la création du club.

On a donc $a_0 = 3$. On suppose que le nombre d'adhérents au club évolue de la même façon les années suivantes.

PARTIE A : Expression par récurrence de la suite

1. Calculer a_1.
2. Expliquer brièvement pourquoi on a, pour tout $n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 0,75a_n + 1,2$.

PARTIE B : Étude graphique de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Dans le repère donné ci-dessous, à rendre avec la copie, on a représenté la droite D d'équation $y = 0,75x + 1,2$ et la droite Δ d'équation $y = x$ pour les abscisses comprises entre 0 et 6.

1. Placer a_0 sur l'axe des abscisses et, en utilisant les droites D et Δ, placer sur l'axe des abscisses les valeurs $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ (laisser apparents les traits de construction).
2. Quelle semble être la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

PARTIE C : Étude numérique de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = a_n - 4,8$ pour tout nombre entier naturel n.

1. (a) Calculer u_0.
   (b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 0,75.
   (c) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n :
   $a_n = 4,8 - 1,8 \times (0,75)^n$.
   (d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
2. Si l'évolution du nombre d'adhérents se poursuit selon ce modèle, le club peut-il avoir 500 adhérents durant une année ? Pourquoi ?
3. Justifier que $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 4,8(n+1) - 7,2(1 - (0.75)^{n+1}$
4. En déduire l'argent qu'ont rapporté l'ensemble des adhérents depuis la création du club jusqu'à la fin de l'année 2009, sachant que la cotisation annuelle de chaque adhérent est de 100 euros.

A RENDRE AVEC LA COPIE DE SPECIALITE