Devoir commun de mathématiques - 21.10.09 - 2 heures
Terminales ES 1 et 2, Lycée Newton, Y. Angeli et L. Arab

Exercice 1 (6 points)

Soit g la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^3 + x^2 - \dfrac{x}{3} + 1$.

1. Étudier la limite de g en $+\infty$, puis la limite de g en $-\infty$.
2. Calculer la dérivée g' de g.
3. Préciser le signe de g', en déduire le tableau de variation de g.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0, 3[$.
5. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
6. Combien de solutions $g(x) = 0$ admet-elle sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 2 (10 points)

Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{2 - 2x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Trouver trois réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2 - 2x}$.
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote horizontale ? Si oui, préciser son équation.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to 1, x > 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1, x < 1} f(x)$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote verticale ? Si oui, préciser son équation.
4. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.
5. Étudier le signe de $f(x) + \dfrac{1}{2}x - 1$. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de son asymptote $\mathcal{D}$.
6. Montrer que l'expression de la dérivée f' de f est $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{2(1 - x)^2}$.
7. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
8. Donner les valeurs approchées de f à 10^{-1} près en x =-2 ;-1 ;0 ;0,5 ;1,5 ;2 ;3 ;4.
9. Tracer soigneusement les asymptotes, puis la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère gradué de -4 à 6 en abscisse, de -6 à 6 en ordonnée, et d'unité 1 cm.

Tourner la page →

EXERCICE 3. (4 points)

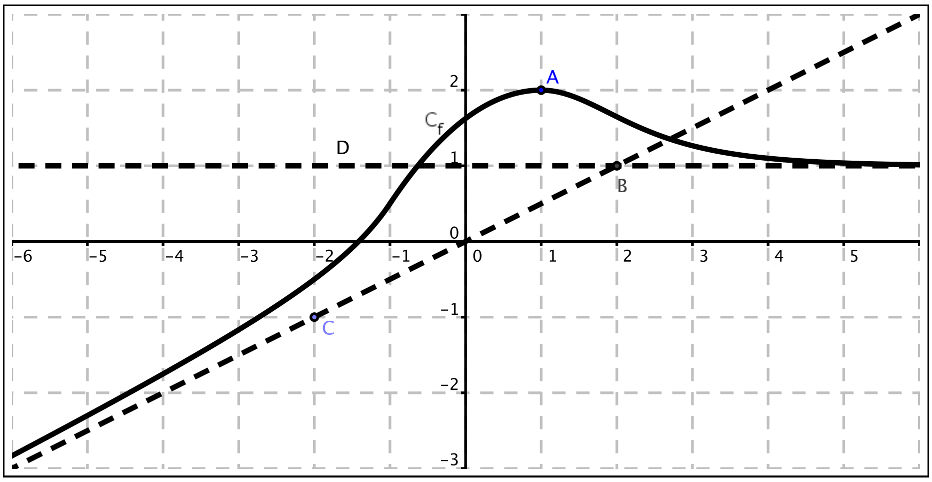
Pour traiter cette exercice, on reportera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse, sans justifier. (par exemple 9. d).

Chaque question admet une et une seule réponse exacte.

Chaque bonne réponse rapporte $0,5$ point, chaque mauvaise réponse coûte $0,5$ point, l'absence de réponse ne rapporte ni ne coûte rien. La note minimale de l'exercice est 0.

Le graphique suivant représente trois points $A(1;2)$, $B(2;1)$ et $C(-2;-1)$, une droite $\mathcal{D}$ qui passe par B, la droite (BC), et la courbe $\mathcal{C}_f$ qui représente f.

Par hypothèse, f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet $\mathcal{D}$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et (BC) comme asymptote oblique en $-\infty$.



1. L'image de 1 par f est :
   (a) $-0,7$ (b) 2 (c) $+\infty$
2. L'image de -2 par f est :
   (a) -1 (b) $-0,5$ (c) 1
3. L'équation de (BC) est :
   (a) $y = \frac{1}{2}x$ (b) $y = -\frac{1}{2}x$ (c) $y = 2x$
4. La limite de f en $+\infty$ est
   (a) $+\infty$ (b) 1 (c) Impossible à déterminer.
5. La limite de f en $-\infty$ est
   (a) $-\infty$ (b) $+\infty$ (c) $-2,8$.
6. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A est
   (a) $y = x$ (b) $y = 0$ (c) $y = 2$
7. Sur $[-3,3]$ le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ est
   (a) 0 (b) 1 (c) 2
8. Sur $\mathbb{R}$, le maximum de f est
   (a) 1 (b) 2 (c) Impossible à déterminer.