Devoir 12 -03.06.10-
Terminales ES - Lycée Newton - Y. Angeli

Exercice 1. (Polynésie juin 2009, 4pts) : **5,5 points**
Dans un laboratoire, se trouve un atelier nommé “L’école des souris”. Dès leur plus jeune âge, les souris apprennent à effectuer régulièrement le même parcours. Ce parcours est constitué de trappes et de tunnels que les souris doivent emprunter pour parvenir à croquer une friandise. Plus la souris effectue le parcours, plus elle va vite.

Une souris est dite “performante” lorsqu’elle parvient à effectuer le parcours en moins d’une minute.

Cette école élève des souris entraînées par trois dresseurs :

48 % des souris sont entraînées par Claude, 16 % par Dominique et les autres par Éric.

Après deux mois d’entraînement, on sait que :
– parmi les souris de Claude 60 % sont performantes ;
– 20 % des souris de Dominique ne sont pas encore performantes ;
– parmi les souris d’Éric, deux sur trois sont performantes.

On choisit au hasard une souris de cette “école”.
On note C, D, E et P les évènements suivants :
– C : la souris est entraînée par Claude ;
– D : la souris est entraînée par Dominique ;
– E : la souris est entraînée par Éric ;
– P : la souris est performante .

1. (a) Déterminer $p(C)$, $p(E)$, $P_D\left(\overline{P}\right)$ et $p_E(P)$.
   (b) Traduire l’énoncé à l’aide d’un arbre pondéré.
2. DétermIner la probabilité de l’évènement “la souris est entraînée par Claude et est performante”.
3. Démontrer que la probabilité pour une souris d’être performante est de $0,656$.

   Pour les questions suivantes, on arrondira les résultats au millième.
4. On choisit au hasard une souris parmi celles qui sont performantes.
   Quelle est la probabilité que cette souris soit entraînée par Dominique ?
5. *Pour cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte.*
   On choisit maintenant au hasard quatre souris de cette « école ».
   On assimile ce choix à un tirage avec remise.
   Quelle est la probabilité d’obtenir au moins une souris performante ?

Problème. (Polynésie septembre 2007, 9pts) **14.5 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont deux réels.

On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. On sait que $(\mathcal{C})$ passe par le point $\mathrm{E}(0\,;\,1)$ et qu'elle admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale. En déduire $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Vérifier que $f'(x) = (-ax+a-b)\mathrm{e}^{-x}$
3. En utilisant les résultats précédents, déterminer a et b.

Partie B

Pour la suite, on admet que la fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. (a) Vérifier que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.
   (b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (c) En déduire que $(\mathcal{C})$ possède une asymptote dont on précisera une équation.
2. (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ puis dresser le tableau de variations complet de f.
3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0,5$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;\,4]$.
   (b) Déterminer un encadrement de α à 10^{-3} près.
4. On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = -(x+2)\mathrm{e}^{-x}$.
   Montrer que g est une primitive de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
5. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième du résultat.
   (Rappel : la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ est égale à $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$)

Partie C

Une entreprise produit q milliers de pièces par jour, q étant un réel de $[0\,;\,4]$.
Le prix de revient d'une pièce, exprimé en euros, dépend de q et est donné par l'expression :

$$f(q) = (q+1)\mathrm{e}^{-q}.$$

1. Combien coûte, en moyenne, à l'euro près, la production de 4 000 pièces ?
2. À partir de quelle quantité de pièces produites le prix de revient d'une pièce est-il inférieur à 0, 5 euro ?