Devoir 11 -11.05.10-
Exercice du bac ES Polynésie de juin 2006 (6 points)
Terminales ES - Lycée Newton - Y. Angeli

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 + x + 1\right) \mathrm{e}^x.$$

Dans le repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm sur chaque axe, on note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique et $\mathcal{C}_{\exp}$ la représentation graphique de la fonction exponentielle.

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Donner les valeurs de $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2\mathrm{e}^x$ et de $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x$.
   (c) En déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
2. (a) On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$, montrer que
   $$f'(x) = (x+1)(x+2)\mathrm{e}^x.$$
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Préciser les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_{\exp}$.
   (b) Construire ces deux courbes dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
5. Soit F la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $F(x) = \left(x^2 - x + 2\right) \mathrm{e}^x$.
   Prouver que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
6. (a) Déterminer la valeur exacte de l'aire en cm^2 du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.
   (b) Déterminer la valeur exacte de l'aire en cm^2 du domaine $\mathcal{D}'$ délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{\exp}$, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

Partie A

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'équation :

$$2X^2 - 15X + 18 = 0.$$

2. En déduire
   (a) les solutions de l'équation : $2e^{2x} - 15e^x + 18 = 0$;
   (b) le signe de $2e^{2x} - 15e^x + 18 = 0$ selon les valeurs de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]\ln 3\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2x - 2 + \dfrac{3}{e^x - 3}$.
On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représenative de la fonction f relativement à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

1. Déterminer la limite de la fonction f en $\ln 3$. Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{C}_f)$?
2. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.
   Quelle est la limite de la fonction f en $+\infty$?
3. Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (D) au voisinage de plus l'infini.
4. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]\ln 3\ ;\ +\infty[$; on note f' sa dérivée.
   Montrer que :

   pour tout nombre réel x de l'intervalle $]\ln 3\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2e^{2x} - 15e^x + 18}{(e^x - 3)^2}$.

   En déduire, à l'aide de la partie A, le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f.
5. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ ainsi que ses asymptotes. (Si la fonction présente un minimum ou un maximum, le mettre en évidence.)
6. (a) Montrer que :

   pour tout réel x de l'intervalle $]\ln 3\ ;\ +\infty[$, $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{e^x}{e^x - 3}$.

   (b) Soit g la fonction définie par :

   pour tout réel x de l'intervalle $]\ln 3\ ;\ +\infty[$, $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 3}$.

   Déterminer une primitive de la fonction g sur l'intervalle $]\ln 3\ ;\ +\infty[$.

   (c) En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]\ln 3\ ;\ +\infty[$.