Feuille d'exercices II - 16.09.08 -
Activité d'initiation à la notion de limite.

Terminale ES 1, Lycée Newton, Y. Angeli

Limite d'une fonction en un point

Intuitivement, une fonction f a pour limite b au point d'abscisse a si, lorsque x s'approche de a, la valeur $f(x)$ s'approche de b.

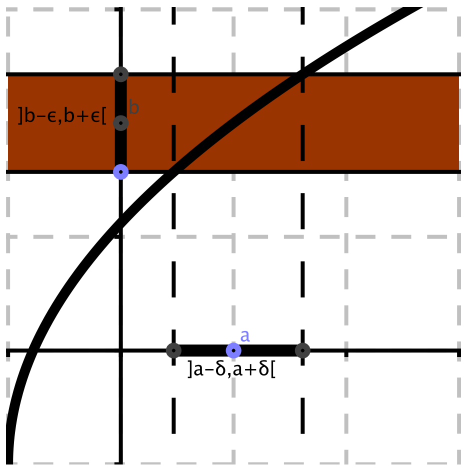

Figure 1:

Rigoureusement, on dit que la limite de f en b est a si pour tout intervalle du type $I\ =]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$), on peut trouver un intervalle $J=]a-\delta, a+\delta[$ tel que l'image par f des points de J où f est définie soit contenue dans I. (c'est-à-dire, pour tout x dans $]a-\delta, a+\delta[$, on a $f(x)$ est dans $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$).

Tableau de valeurs

CASIO : Menu *Table*, $F5$ pour paramétrer le tableau, $F6$ pour l'afficher.
TI : $2nd$+$F4$ (TBLSET ou DEFTBL) pour paramétrer le tableau, $2nd+F5$ (TABLE) pour l'afficher.

1. Approche numérique Soit $a = 1$ et

$$f : x \mapsto \frac{x^3-1}{x-1}.$$

a. Sur quel ensemble f est-elle définie ?
b. À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs de f sur l'intervalle $[a-0,01, a+0,01]$, avec un pas de 0.002.
c. D'après vous la fonction f admet elle une limite en a ? Si oui, laquelle ?
d. Répondre aux questions précédentes pour :

$$a = 0; \quad f : x \mapsto \frac{x^3-1}{x}.$$

$$a = 2; \quad f : x \mapsto x^2.$$

$$a = 0; \quad f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}.$$

2. Approche graphique

Parmi les fonctions représentées par les courbes suivantes, lesquelles, selon vous admettent une limite en $x = 1$?

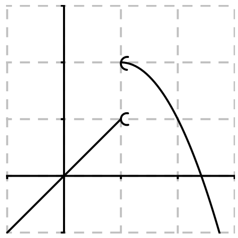

Figure 2: -

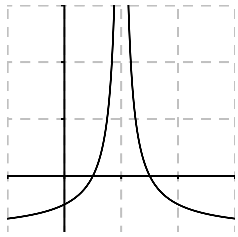

Figure 3: -

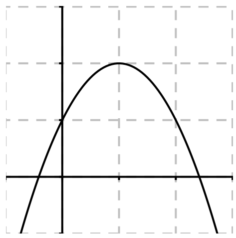

Figure 4: -

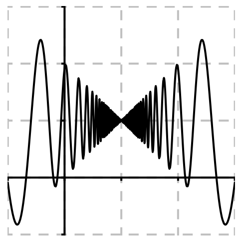

Figure 5: -

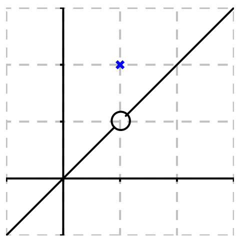

Figure 6: -

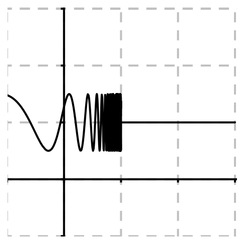

Figure 7: -

3 Approche rigoureuse de $x \mapsto \alpha x + \beta$

Soit $\alpha \neq 0$ et β deux réels. On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \alpha x + \beta.$$

a. On suppose $\alpha > 0$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$f(x) \in]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[\Leftrightarrow x \in \left]\frac{a}{\alpha}-\frac{\varepsilon}{\alpha}, \frac{a}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right[.$$

b. On suppose $\alpha > 0$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$f(x) \in]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[\Leftrightarrow x \in \left]\frac{a}{\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha}, \frac{a}{\alpha}-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right[.$$

c. En déduire que la limite de f en a est $f(a)$.