Devoir Maison 1 - 03.10.08 -
Terminale ES 1, Lycée Newton, Y. Angeli

On considère la fonction définie par

$$f(x) = \frac{-x^2 + x - 9}{x - 1}$$

1. Ensemble de définition

Pour quels x la fonction f est-elle définie ?

2. Limite en 1

a. Donner la limite de f lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures (1^+).

b. Donner la limite de f lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures (1^-).

c. Que dire de la limite de f en 1 ?

3. Limites en $+\infty$ et $-\infty$.

a. Montrer que

$$f(x) = \frac{-x + 1 - \frac{9}{x}}{1 - \frac{1}{x}}.$$

b. En déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

4. Variations de f.

On rappelle que

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

a. Montrer que

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 8}{(x - 1)^2}.$$

b. Donner le tableau de signe de $-x^2 + 2x + 8$.

c. En déduire le tableau de variation de f. (On y fera figurer les limites calculées).

5. Solution d'une équation

On considère l'équation (E) : $f(x) = 9$.

a. Montrer que l'équation (E) n'a pas de solution sur $]1, +\infty[$.

b. Calculer $f(-9)$. Montrer que l'équation (E) n'a pas de solution sur $]-\infty, -9[$.

c. Calculer $f(-1/2)$. Montrer que l'équation (E) n'a pas de solution sur $]-1/2, 1[$.

d. Que vaut $f(-2)$? Montrer que l'équation (E) admet exactement une solution sur $]-9, -2[$, et exactement une solution sur $]-2, -1/2[$.

e. Calculer les valeurs exactes des deux solutions de l'équation (E).