BAC BLANC - 02.03.09 -
Terminales ES, Lycée Newton

Exercice 1 - Amérique du Sud 2008 **6 points**

On admettra que les fonctions considérées dans cet exercice sont dérivables sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

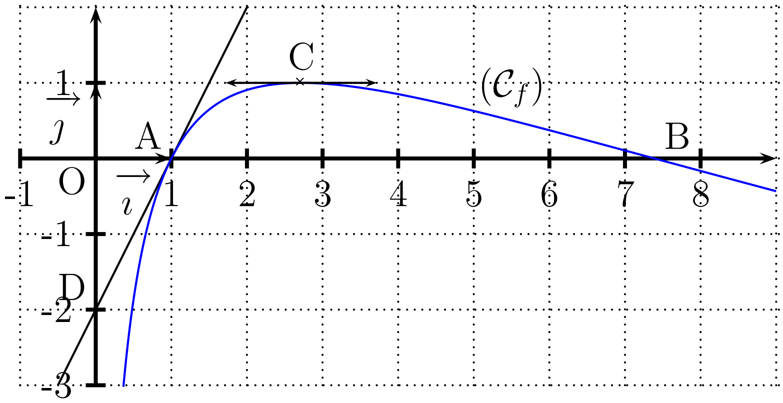
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = (2 - \ln x)\ln x.$$

La figure ci-dessous donne la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en A$(1\,;\,0)$ et en B.

La tangente en C à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente en A à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des ordonnées en D.



1. Déterminer l'abscisse du point B (la valeur exacte est demandée).
2. Calculer la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
3. On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,
   $$f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x}$$
   b. Déterminer les coordonnées du point C et l'ordonnée du point D (les valeurs exactes sont demandées).
4. **a.** Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par
   $$g(x) = x[f(x) + 2\ln x - 4].$$
   Démontrer que g est une primitive de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x$ et donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

Exercice 2 - Liban 2006 **5 points**

La question 6 peut être traitée indépendamment des 5 autres.

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} *près.*

Un pépiniériste conditionne un mélange de 400 bulbes de fleurs composé de trois variétés :

- 100 bulbes d'Anémones
- 180 bulbes de Bégonias
- 120 bulbes de Crocus.

On conviendra qu'un bulbe germe s'il donne naissance à une plante qui fleurit.
Après avoir planté tous les bulbes et observé leur floraison, on constate que :

- 83 % des bulbes germent.
- 50 % des bulbes d'Anémones germent.
- 90 % des bulbes de Bégonias germent.

On note les évènements suivants :

- A : le bulbe planté est un bulbe d'Anémone.
- B : le bulbe planté est un bulbe de Bégonias.
- C : le bulbe planté est un bulbe de Crocus.
- G : le bulbe planté germe.

1. Donner les probabilités conditionnelles $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{G})$, $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{G})$ et la probabilité $P(\mathrm{G})$.

2. Quelle est la probabilité qu'un bulbe planté soit un bulbe d'Anémone qui germe ?

3. Quelle est la probabilité que le bulbe planté soit un bulbe qui germe ou soit un bulbe de Bégonias ?

4. **a.** Calculer la probabilité conditionnelle $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{G})$.

b. Que peut-on en déduire ?

5. On considère un bulbe ayant germé. Quelle est la probabilité que ce soit un bulbe de Crocus ?

6. On considère à présent que le pépiniériste dispose d'un très grand nombre de bulbes et que la probabilité qu'un bulbe germe est de 0,83. II prélève au hasard successivement trois bulbes de ce stock. Quelle est la probabilité qu'au moins un des trois bulbes choisis germe ?

Remarques :

1. On pourra s'aider d'un arbre de probabilité.

2. On rappelle la formule des probabilités totales : si $\mathrm{A}_1 1$, A_2, $\ldots \mathrm{A}_n$, forment une partition de l'univers, alors la probabilité d'un évènement quelconque E est donnée par : $p(\mathrm{E}) = p(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{E}) + p(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{E}) + \ldots + p(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{E})$.

Exercice 3 - Inde 2002 **4 points**

On donne les valeurs d'un indice boursier au premier de chaque mois entre janvier et septembre 2001.

Date	1/01	1/02	1/03	1/04	1/05	1/06	1/07	1/08	1/09
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Indice y_i	7 100	6 900	6 800	6 600	6 500	6 350	6 400	6 250	6 000

Les calculs seront effectués à l'aide de la calculatrice. Aucun détail de ces calculs n'est demandé.

1. Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points associé à la série statistique $(x_i,\ y_i)$. On prendra 1 cm pour deux unités en abscisse et 1 cm pour 200 points d'indice en ordonnées, en commençant au point (0 ; 5 000).

2. On considère que ce nuage justifie un ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Donner léquation réduite $y = ax + b$ de la droite D d'ajustement affine de y en x (les coefficients étant arrondis à 0,01). Tracer D dans le repère.

3. Pour tout entier i entre 1 et 9, calculer le carré du résidu $(y_i - ax_i - b)^2$. Calculer en suite la somme des carrés des résidus.

4. On suppose que la tendance se poursuit.

a. En utilisant cet ajustement, donner une estimation à 10 points près de cet indice boursier au 1^{er} janvier 2002.

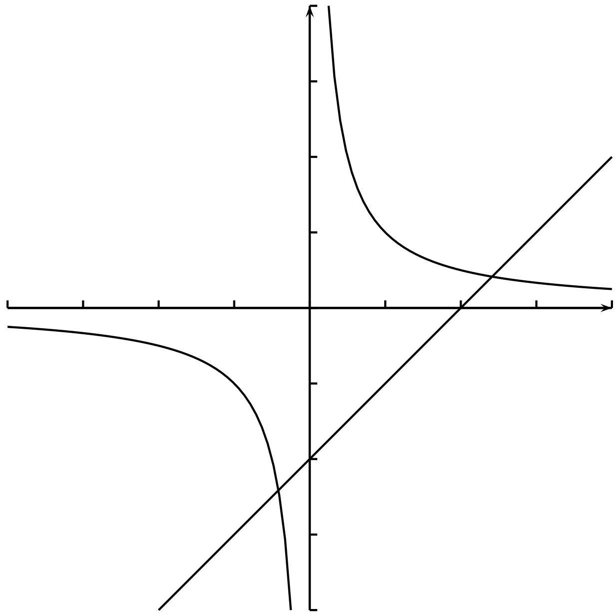
b. Calculer le mois à partir suquel on peut estimer que cet indice sera inférieur à 5 000. Comment peut-on vérifier ce résultat graphiquement ?

Exercice 4 (Nouvelle Calédonie Septembre 2004) **5 points**

pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Soit l'équation (E) : $\dfrac{1}{x} = x - 2$ où l'inconnue est un réel de l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

1. Un élève a représenté sur sa calculatrice l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ et la droite d'équation $y = x - 2$.



Au vu du graphique ci-dessus obtenu à l'écran de sa calculatrice, combien l'équation (E) semble-t-elle admettre de solutions sur $]0~;~+\infty[$?

2. Un second élève considère la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x - 2 - \frac{1}{x}.$$

a. Déterminer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition.

b. On note g' la fonction dérivée de g. Calculer $g'(x)$. Montrer que g est strictement croissante sur $]0~;~+\infty[$.

c. En déduire le nombre de solutions de l'équation (E) et en donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

3. Un troisième élève dit : « Je peux résoudre l'équation (E) algébriquement ». Justifier, en résolvant l'équation (E), que ce troisième élève a raison.

Asie 2004 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Soit f la fonction définie pour tout réel x élément de $[0\,;\,10]$ et pour tout réel y élément de $[0\,;\,12]$ par :

$$f(x\ ;\ y) = 2x(y+1).$$

On donne ci-après la représentation graphique de la surface $z = f(x,\ y)$ dans un repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.

Pour financer un projet humanitaire, les adhérents d'une association décident de fabriquer des cartes de voeux.

Pour produire une quantité z de paquets de cartes, ils utilisent x décilitres d'encre A et y décilitres d'encre B. On admet que $x,\ y$ et z sont liés par la relation

$$z = 2x(y+1),$$

où x est un nombre entier compris entre 0 et 10, et y un nombre entier compris entre 0 et 12.

Dans tout l'exercice, les quantités d'encre seront exprimées en décilitres.

Partie A

1. **a.** Combien de paquets de cartes peut-on fabriquer avec 7 décilitres d'encre A et 8 décilitres d'encre B ?

   b. Donner la quantité d'encre A, la quantité d'encre B, et le nombre de paquets de cartes associés respectivement aux points M, P et R à coordonnées entières, de la surface donnée ci-dessous.

2. **a.** Quelle est la nature de la section de la surface par le plan d'équation $x = 4$, parallèle au plan $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$? Justifier la réponse.

   b. Justifier que la section de la surface par le plan d'équation $z = 5$ est une hyperbole dont on donnera une équation.

Partie B

Le prix d'un décilitre d'encre A est 6 et celui d'un décilitre d'encre B est 2 .
L'association décide d'investir 46 dans l'achat des encres.

1. Donner la relation entre les quantités x et y d'encres A et B achetées pour un montant de 46 .

2. Montrer alors que $z = -6x^2 + 48x = g(x)$.

3. En étudiant la fonction g, répondre aux questions suivantes :

a. Quelle quantité d'encre A l'association achètera-t-elle pour fabriquer le maximum de paquets de cartes ?

b. Combien de paquets de cartes seront alors fabriqués ?

c. Quelle quantité d'encre B sera alors utilisée ?