Devoir commun de mathématiques - 17.12.08 - 2 heures
Terminale ES 1 et 2, Lycée Newton, Y. Angeli et L. Arab

Exercice 1 (BAC métropole, septembre 2007)

Le tableau suivant donne, en milliers, le nombre de Pactes Civils de Solidarité (PACS) signés chaque année en France :

Année	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année, x_i	0	1	2	3	4
Nombre de PACS en milliers, y_i	22,1	19,4	25	31,1	39,6

1. Calculer, à $0,1$ près, le pourcentage d'augmentation du nombre de milliers de Pactes Civils de Solidarité entre 2000 et 2004.

2. On envisage un ajustement affine.

a. À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$. Par la suite, on pose $f(x) = ax + b$

b. En supposant que cet ajustement est valable jusqu'en 2007, donner une estimation du nombre de milliers de PACS signés en 2007.

3. On envisage un autre type d'ajustement.
On modélise le nombre de milliers de PACS signés durant l'année $2000 + x$ (x entier) à l'aide de la fonction g définie par $g(x) = 1,6x^2 - 1,8x + 21,4$

a. En utilisant ce second modèle, calculer le nombre de milliers de PACS signés en 2007.

b. On suppose que l'évolution se poursuit selon ce modèle jusqu'en 2015. Le nombre de milliers de PACS signés en 2010 sera-t-il supérieur à 100 000 ? Justifier.

4. Comparaison des deux ajustements.
Pour chacun des deux modèles, on calcule ci-dessous le tableau des carrés des écarts entre les valeurs réelles et les valeurs calculées à l'aide de chacun de ces deux ajustements.

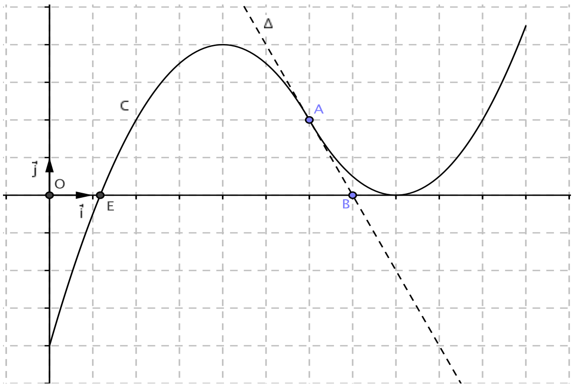
x_i	0	1	2	3	4
$(y_i - f(x_i))^2$	16				

x_i	0	1	2	3	4
$(y_i - g(x_i))^2$	0,49				

a. Recopier et compléter ces deux tableaux, les valeurs étant arrondies au centième.

b. Lequel de ces deux ajustements semble le plus proche de la réalité ? Justifier.

EXERCICE 2 (D'après le BAC métropole, septembre 1996)



On considère une fonction définie et dérivable sur $I = [0; 11]$.
Sa représentation graphique est la courbe $\mathcal{C}$ ci-contre. Elle passe par les points $A(6; 2)$ et $E(0; 1, 2)$.
La tangente en A à $\mathcal{C}$ est la droite Δ qui passe par le point $B(7; 0)$.

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Par lecture graphique :

a. Dresser le tableau de variation de f. Indiquer le signe de $f'(x)$ sur I.

b. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -2$.

c. Donner l'ensemble des réels tels que $2 \leq f(x)$.

2. Que valent $f(6)$ et $f'(6)$? Écrire une équation de Δ.

3. La fonction F est définie et dérivable sur I, a pour dérivée f, et $F(0) = 0$, $F(1, 2) = -2, 2$, $F(11) = 17, 8$. Dresser le tableau de variation de F sur $[0, 11]$.

EXERCICE 3.

Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{2x - 1}{1 - x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote horizontale ?

2. Étudier les limites de f en 1^+ et 1^-. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote verticale ?

3. Montrer que la dérivée f' de f est

$$f'(x) = \frac{1}{(1 - x)^2}.$$

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

5. Donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point $(0; -1)$.

6. Étudier le signe de $f(x) - (x - 1)$, en déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et T.

7. Donner les valeurs $f(x)$ pour x variant de -5 à 5, de $0, 5$ en $0, 5$.

8. Tracer soigneusement T, les asymptotes, puis la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère gradué de -5 à 5 en abscisse, et de -6 à 6 en ordonnée, d'unité graphique 1cm.