DEVOIR 4 - 02.12.08 -
Terminale ES 1, Lycée Newton, Y. Angeli

Nom - prénom :

Répondre aux questions sur les feuilles d'énoncé. Les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-3} *près. Les résultats obtenus à la calculatrice seront donnés sans justification.*

INTRODUCTION

On peut observer, le long de la côte atlantique d'Amérique du Nord, des corneilles dont les habitudes alimentaires sont un peu particulières : leur met favori est un gros mollusque dont il faut briser la solide coquille pour pouvoir le manger.

La corneille utilise la technique suivante pour pouvoir parvenir à ses fins : elle emmène sa proie dans les airs, la laisse tomber sur le sol, redescend la chercher, et ce, autant de fois qu'il est nécessaire pour que la coquille casse enfin.

Un zoologiste américain intrigué par ce comportement a remarqué lors de ses observations que la plupart des oiseaux laissent choir leur proire d'une hauteur d'environ 5 mètres. Pourquoi 5 mètres ? Cette altitude correspondrait-elle à une hauteur optimale, c'est-à-dire une hauteur telle que le travail de l'oiseau soit minimum ?

Nous allons utiliser les observations du zoologiste pour déterminer si oui ou non les corneilles semblent avoir intégré un processus d'optimisation dans le comportement.

MODÈLE MATHÉMATIQUE

Supposons que l'oiseau laisse tomber sa proie à l'altitude x et qu'il doive recommencer cette opération n fois pour que la coquille casse. On peut considérer que le travail de l'oiseau est proportionnel à x et n donc à

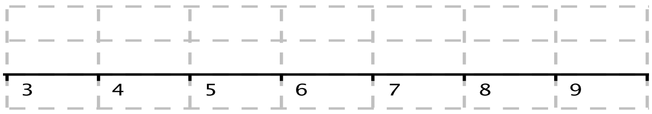
$$T = xn$$

Par ailleurs, il est logique de penser qu'une coquille casse d'autant plus vite qu'elle tombe de haut, c'est-à-dire que n est une fonction qui dépend de x.

Il en résulte que T est une fonction de x dont on se demande si elle est minimum lorsque x vaut environ 5 mètres.

Utilisant un stock important de coquilles de même grandeur, le zoologiste a simulé leur chute en laboratoire.

1. Sur 8 expériences à une altitude de 5 mètres, les coquilles se sont brisées au bout de 6,5,7,9,6,4,5 et 6 tentatives. Donner la moyenne et l'écart type de cette série. Représenter le diagramme en boite correspondant.



Voici le résultat de ses observations (x_i désigne la hauteur de la chute en mètres, et n_i le nombre moyen de jets pour briser la coquille, y_i est fait l'objet d'une question ultérieure) :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	10	15
n_i	55	10	7.5	6	5	4	4	3	2.5
y_i									

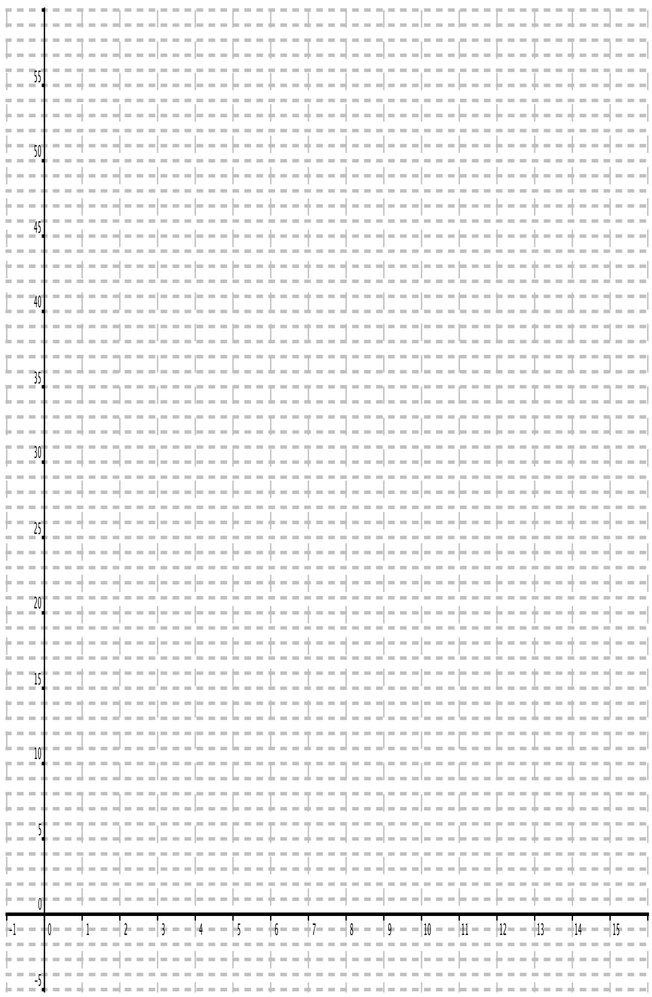


Figure 1: Nuage des $M_i(x_i, n_i)$

2. Représenter ci-contre le nuage de points des $M_i(x_i, n_i)$. Un ajustement affine du nuage vous semble-t-il pertinent ? Pourquoi ?

3. Tracer à main levée une courbe simple réalisant un ajustement du nuage.

On veut définir une fonction d'ajustement qui réponde aux contraintes :
A. : Plus l'altitude x est élevé, moins il faut de tentatives $n(x)$ pour briser une coquille.
B. : Pour casser une coquille, il faut la faire tomber au moins une fois. Pour qu'elle tombe au bout d'une chute, il faut monter suffisamment haut.
C. : La coquille casse d'autant moins vite qu'elle tombe de moins haut. Il existe une altitude minimale x_0 tellement petite que la coquille ne peut casser.

On introduit donc une fonction définie pour $x \in]x_0, +\infty[$ par

$$n(x) = 1 + \frac{c}{x - x_0}$$

où x_0 et c sont deux réels strictement positifs.

4. Déterminer la limite de n en $+\infty$. Si la courbe représentative de n admet une asymptote en $+\infty$, donner son équation. Interpréter ce résultat par rapport aux contraintes précédentes.

5. Déterminer la limite de n en x_0^+. Si la courbe représentative de n admet une asymptote en x_0, donner son équation. Interpréter ce résultat par rapport aux contraintes précédentes.

6. Calculer la dérivée de n et en compléter son tableau de variation. Interpréter ce résultat par rapport aux contraintes précédentes.

x	x_0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$n'(x)$	
$n(x)$	

7. On pose $y(x) = \frac{1}{n(x)-1}$. Montrer que

$$y(x) = \frac{1}{n(x) - 1} = \frac{1}{c}x - \frac{1}{c}x_0$$

On pose $y_i = \frac{1}{n_i - 1}$. Calculer les y_i et reporter leurs valeurs dans le tableau de la deuxième page. Représenter le nuage des points $M_i'(x_i, y_i)$ sur la figure 2.

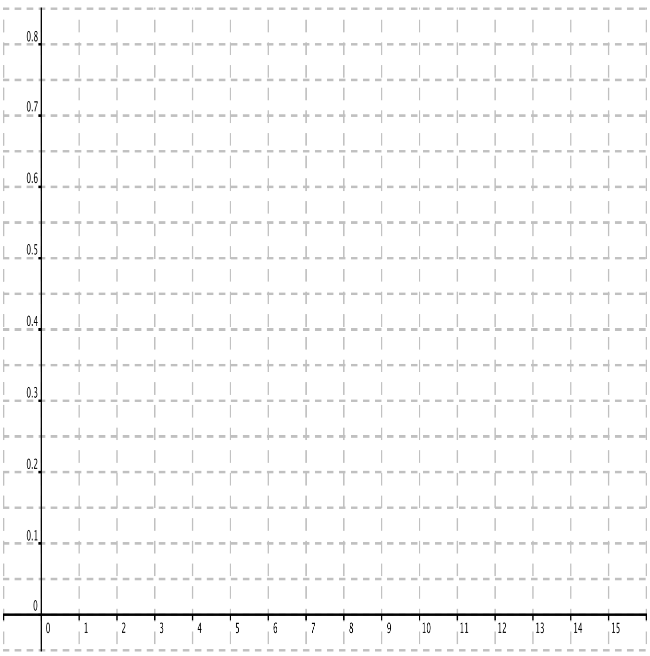


Figure 2: Nuage des points $M_i'(x_i, y_i)$

8. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage des M_i' et placer ce point sur la figure 2.

9. Donner les coefficients de l'équation $y = ax + b$ de la droite d'ajustement des moindres carrés (d) pour le nuage des M_i'. Tracer cette droite sur le graphique. Calculer la somme S des carrés des résidus correspondant à cet ajustement. Sans la calculer, comparer la somme S' des carrés des résidus d'un ajustement par la droite $(M_1'M_9')$ avec S.

10. Déduire de $y(x) = ax + b$ et de la question 7 le coefficient c et l'altitude minimale x_0 nécessaire à casser une coquille. Donner explicitement $n(x)$. Estimer le nombre de jets moyens n qu'il faut réaliser pour briser une coquille à une altitude de 12m.

11. Donner une expression de la fonction $T(x) = xn(x)$. Montrer que

$$T'(x) = \frac{x^2 - 1,88x - 17,9164}{(x - 0,94)^2}$$

Dresser le tableau de variation de T. Pour quelle altitude x la fonction T est elle un minimum ? Quel est alors le nombre moyen de jets pour briser une coquille ? Conclure.

x	x_0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$T'(x)$	
$T(x)$	

12. Pour ses 8 expériences de jet à une altitude de $7m$, le zoologiste a obtenu une moyenne de 4 tentatives. La variance de la série était nulle. Donner un exemple de série qu'il aurait pu obtenir :

13. Pour ses 8 expériences de jet à une altitude de $8m$, le zoologiste a obtenu une moyenne de 4 tentatives. La variance de la série était de 1. Donner un exemple de série qu'il aurait pu obtenir. :
