Devoir commun de mathématiques - 19.11.08 - 2 heures
Terminale ES 1 et 2, Lycée Newton, Y. Angeli et L. Arab

Exercice 1 (6 points)
Soit g la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 1.$$

a. Étudier la limite de g en $+\infty$, puis la limite de g en $-\infty$.
b. Calculer la dérivée g' de g.
c. Préciser le signe de g', en déduire le tableau de variation de g.
d. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-1, 0]$.
e. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 2 (10 points)
Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 7x - 11}{x - 3}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
a. Trouver trois réels a, b, c tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}.$$

b. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. La fonction f admet-elle une asymptote horizontale ?
c. Étudier les limites de f en 3^+ et 3^-. La fonction f admet-elle une asymptote verticale ?
d. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -2x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.
e. Étudier le signe de $f(x) + 2x - 1$ et en déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de son asymptote $\mathcal{D}$.
f. Montrer que la dérivée f' de f est

$$f'(x) = -2\frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2}.$$

g. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
h. Donner les valeurs approchées de f à 10^{-1} près en $x = -2, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6$ et 7.
i. Tracer soigneusement les asymptotes, puis la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère gradué de -2 à 7 en abscisse, (1cm=1 unité) et de -24 à 12 en ordonnée (1cm=4 unités).

Exercice 3 (4 points)

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule réponse est exacte. On demande de répondre sur la copie, sans justifier. (par exemple, 5 : c).
Une réponse exacte apporte un point, une réponse fausse enlève 0.5 point et l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève rien. Si le total est négatif, la note attribuée à l'exercice est 0.

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont le tableau de variation est :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	0

1. On peut affirmer que :
(a) $\lim_{x\to -1} f(x) = -2$ (b) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$
(c) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$, (d) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

2. On peut affirmer que la courbe représentative de f admet :
(a) pour asymptote les droites d'équations $y = 1$ et $y = 3$.
(b) pour asymptote les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.
(c) pour asymptote la droite d'équation $y = 0$.
(d) pour asymptote la droite d'équation $x = 0$.

3. L'équation $f(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ exactement
(a) 0 solution.
(b) 1 solution.
(c) 2 solutions.
(d) 3 solutions.

4. L'inéquation $f(x) > 3$
(a) n'a pas de solution.
(b) a pour solution l'ensemble des réels $x > 2$.
(c) a toutes ses solutions négatives.
(d) a toutes ses solutions positives.