Devoir 2 - 22-10-08 - Sujet A.
Terminale ES 1, Lycée Newton, Y. Angeli

Problème : Étude de fonction

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2+5}{2-x}.$$

1. Comportement près de la valeur interdite

1.a. Donner l'ensemble de définition de f.

1.b. Donner le tableau de signes de $2-x$. En déduire les limites de $2-x$ en 2^+ et 2^-.

1.c. En déduire la limite de f en 2^+, puis la limite de f en 2^-.

1.d De quel type est l'asymptote de f en $x = 2$?

2. Comportement à l'infini

2.a. Calculer la limite de f en $+\infty$.

2.b. Calculer la limite de f en $-\infty$.

2.c. Montrer que

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+5}{2x-x^2},$$

en déduire la limite de $f(x)/x$ en $+\infty$ et la limite de $f(x)/x$ en $-\infty$.

2.d. Montrer que

$$f(x) + x = \frac{2x+5}{2-x},$$

en déduire les limites de $f(x) + x$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

2.e. Déduire des questions 2.d et 2.c que f admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique dont on donnera l'équation.

3. Variations

3.a. Montrer que

$$f'(x) = \frac{-x^2+4x+5}{(2-x)^2}.$$

3.b. Résoudre l'équation $-x^2+4x+5 = 0$, en déduire le tableau de signes de $f'(x)$.

3.c. Donner le tableau de variation de f. On y fera figurer les limites calculées en 1.c, 2.a et 2.b, ainsi que les valeurs $f(-1)$ et $f(5)$.

Tourner la page.

4. Équation $f(x) = 4$

4.a. Calculer $f(-7)$ et $f(1)$.

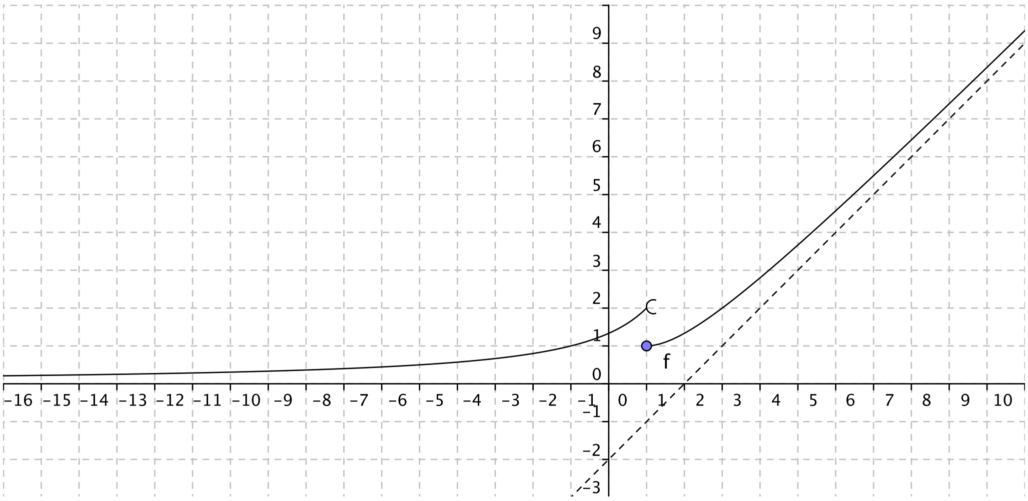
4.b. Montrer que l'équation $f(x) = 4$ n'admet aucune solution sur les intervalles $]2, +\infty[$, $]-\infty, -7]$ et $[1, 2[$.

4.c. Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet exactement une solution sur $]-7, -1[$ et exactement une solution sur $]-1, 1[$.

4.d. En déduire le nombre de solution de $f(x) = 4$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice : lecture graphique

Répondre aux questions suivantes par une lecture graphique, sans justifier :



a. Déterminer $f(-1)$ et $f(1)$.

b. Déterminer $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

c. Déterminer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

d. Résoudre $f(x) = 2$ et $f(x) = 1$.

e. Donner l'équation de l'asymptote de f en $-\infty$ et celle de l'asymptote de f en $+\infty$.

Exercice : limite par encadrement

On considère les trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

$$g(x) = x^7 - x^3 + 1, \quad h(x) = x^7 - x^3 - 1, \quad f(x) = x^7 - x^3 + \sin(x)$$

a. Déterminer la limite en $-\infty$ de g.

b. Déterminer la limite en $-\infty$ de h.

c. Montrer que pour tout réel x, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

d. Déterminer la limite en $-\infty$ de f.

Devoir 2 - 22-10-08 - Sujet B.
Terminale ES 1, Lycée Newton, Y. Angeli

Problème : Étude de fonction

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{3 - x}.$$

1. Comportement près de la valeur interdite

1.a. Donner l'ensemble de définition de f.

1.b. Donner le tableau de signes de $3 - x$. En déduire les limites de $3 - x$ en 3^+ et 3^-.

1.c. En déduire la limite de f en 3^+, puis la limite de f en 3^-.

1.d De quel type est l'asymptote de f en $x = 3$?

2. Comportement à l'infini

2.a. Calculer la limite de f en $+\infty$.

2.b. Calculer la limite de f en $-\infty$.

2.c. Montrer que

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - 5}{3x - x^2},$$

en déduire la limite de $f(x)/x$ en $+\infty$ et la limite de $f(x)/x$ en $-\infty$.

2.d. Montrer que

$$f(x) + x = \frac{3x - 5}{3 - x},$$

en déduire les limites de $f(x) + x$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

2.e. Déduire des questions 2.d et 2.c que f admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique dont on donnera l'équation.

3. Variations

3.a. Montrer que

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 6x - 5}{(3 - x)^2}.$$

3.b. Résoudre l'équation $-x^2 + 6x - 5 = 0$, en déduire le tableau de signes de $f'(x)$.

3.c. Donner le tableau de variation de f. On y fera figurer les limites calculées en 1.c, 2.a et 2.b, ainsi que les valeurs $f(1)$ et $f(5)$.

Tourner la page.

4. Équation $f(x) = -3/2$

4.a. Calculer $f(-1)$ et $f(2)$.

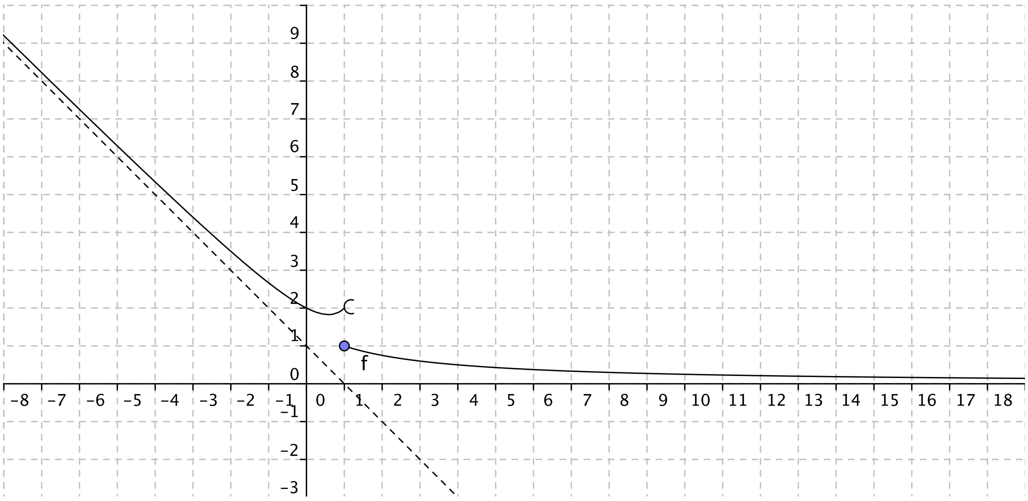
4.b. Montrer que l'équation $f(x) = -3/2$ n'admet aucune solution sur les intervalles $]3, +\infty[$, $]-\infty, -1]$ et $[2, 3[$.

4.c. Montrer que l'équation $f(x) = -3/2$ admet exactement une solution sur $]-1, 1[$ et exactement une solution sur $]1, 2[$.

4.d. En déduire le nombre de solution de $f(x) = -3/2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice : lecture graphique

Répondre aux questions suivantes par une lecture graphique, sans justifier :



a. Déterminer $f(0)$ et $f(1)$.

b. Déterminer $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

c. Déterminer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

d. Résoudre $f(x) = 2$ et $f(x) = 1$.

e. Donner l'équation de l'asymptote de f en $-\infty$ et celle de l'asymptote de f en $+\infty$.

Exercice : limite par encadrement

On considère les trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

$$g(x) = -x^9 + x^2 + 1, \quad h(x) = -x^9 + x^2 - 1, \quad f(x) = -x^9 + x^2 + \cos(x)$$

a. Déterminer la limite en $-\infty$ de g.

b. Déterminer la limite en $-\infty$ de h.

c. Montrer que pour tout réel x, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

d. Déterminer la limite en $-\infty$ de f.