Devoir 10 - 15.05.09 -
Terminale ES 1, Y. Angeli, Lycée Newton

Exercice 1.

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\left(\frac{1}{3}\right)^x - \frac{1}{6}$.

1. Calculer les limites de h en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que $h'(x) = (x - \ln 3)\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Dresser le tableau de variation de h.
3. Calculer $h(0)$ et $h(1)$. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0, 1[$.

Exercice 2. (Antilles-Guyane 2007)

Dans un repère orthonormé d'unité graphique 1cm, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x+1}$.

1. Démontrer que l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 2 de T est $y = -\frac{1}{2}x + 2$.
2. On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x - 2$.
   (a) Montrer que $g'(x) = -\frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{2}x+1} - 1)$, puis dresser le tableau de variation de g.
   (b) Calculer $g(2)$, puis étudier le signe de g. En déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ sur $[0, +\infty[$. En déduire la position relative de la tangente T et de la courbe $\mathcal{C}$.
3. Calculer l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}$, (Ox), (Oy) et la droite d'équation $x = 2$.

Exercice 3.

On considère la série statistique suivante :

x	0,5	1	2	4
y	4.24	6,01	11,99	48,02

1. On pose $z = \ln(y)$. On note $z = ax + b$ l'équation réduite de la droite d'ajustement des moindres carrés de z en x. Donner les valeurs arrondies au millième de a et b.
2. Montrer que $y = ce^{dx}$ où c et d sont des réels dont on donnera des arrondis au centième.
3. Calculer e^d. En déduire que $y = 3 \times 2^x$.