Devoir 8 - 13.02.09 -
Terminale E 1, Lycée Newton, Y. Angeli

Exercice 1.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(2x+3) - 2\ln(x)$

1. Démontrer que l'ensemble de définition de f est $]0, +\infty[$.
2. Résoudre $f(x) = 0$.
3. Exprimer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ en fonction de $\ln 2$.
4. Calculer la dérivée f' de f. Montrer que $f'(x) = -2\dfrac{x+3}{(2x+3)x}$.
5. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
6. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x^2}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (on pourra réécrire f différement).
7. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$, dresser le tableau de variation de f.

Exercice 2.

On considère la fonction g définie par $g(x) = x\ln(x)$

1. Résoudre l'équation $1 + \ln(x) = 0$, puis donner le tableau de signes de $1 + \ln(x)$ en fonction de x.
2. Quel est l'ensemble de définition de g ?
3. Donner les limites de g en 0 et en $+\infty$.
4. Calculer $g'(x)$ et déduire de 1. le tableau de variation de g.
5. Calculer $\ln(\sqrt{e}) + \ln(\sqrt{e})$. En déduire que $\ln(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2}$.
6. Calculer $g(1)$ et $g(\sqrt{e})$.
7. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de g en $x = \sqrt{e}$.
8. Montrer que l'équation $g(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique α sur $\left[1, \sqrt{e}\right]$.
9. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} par excès.

Corrigé du devoir 8 - 13.02.09 - Terminale E 1, Lycée Newton, Y. Angeli

Exercice 1.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(2x+3) - 2\ln(x)$

1. $\ln(x)$ est défini pour $x > 0$ donc $\ln(2x+3)$ est défini pour $2x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$. Donc l'ensemble de définition de f est $]0, +\infty[$.

2. On a pour $x > 0$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \ln(2x+3) - 2\ln(x) = \ln 1 \\ &\Leftrightarrow \ln(2x+3) - \ln\left(x^2\right) = \ln 1 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x+3}{x^2}\right) = \ln 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x+3}{x^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \end{aligned}$$

   Le trinôme a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$, donc ses racines sont $x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{2+4}{2}$. La seule racine strictement positive est 3, donc l'équation admet $x = 3$ comme solution unique.

3. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2\frac{1}{2} + 3) - 2\ln\frac{1}{2} = \ln 4 + 2\ln 2 = 2\ln 2 + 2\ln 2 = 4\ln 2.$

4. $f'(x) = \dfrac{2}{2x+3} - \dfrac{2}{x} = 2\dfrac{x-(2x+3)}{x(2x+3)} = 2\dfrac{-x-3}{x(2x+3)} = -2\dfrac{x+3}{x(2x+3)}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = +\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = +\infty$.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.
   Or $f(x) = \ln(2x+3) - \ln(x^2) = \ln\left(\dfrac{2x+3}{x^2}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$,
   donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

7. Si $x > 0$, $2x+3 > 3 > 0$ et $x+3 > 0$ donc $f'(x) < 0$. Ainsi :

x	$+\infty$		$-\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 2.

On considère la fonction g définie par $g(x) = x\ln(x)$

1. $1+\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow \ln x = \ln(e^{-1}) \Leftrightarrow x = e^{-1}$. Comme ln est strictement croissante, on a :

x	$+\infty$	e^{-1}	$-\infty$
$1+\ln(x)$	-	0	+

2. La fonction g est le produit de $x \mapsto x$ définie sur $\mathbb{R}$ et ln définie sur $]0, +\infty[$, donc g est définie sur $]0, +\infty[$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ par théorème et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$ par produit, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

4. $g'(x) = x \times \dfrac{1}{x} + 1 \times \ln x = 1 + \ln x$.

D'après 1, on obtient :

x	$+\infty$		e^{-1}		$-\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. $2\ln(\sqrt{e}) = \ln(\sqrt{e}) + \ln(\sqrt{e}) = \ln(\sqrt{e}^2) = \ln e = 1$. Donc $\ln(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2}$.

6. $g(1) = 1 \times \ln 1 = 0$, et $g(\sqrt{e}) = \sqrt{e} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$.

7. L'équation de la tangente à la courbe représentative de g en $x = \sqrt{e}$ est : $y = g'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + g(\sqrt{e})$, donc :

$$y = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(x - \sqrt{e}\right) + \frac{\sqrt{e}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \sqrt{e}$$

8. On a : $g(1) = 0 < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{e}}{2} = g(\sqrt{e})$. En outre, g est dérivable sur $[1, \sqrt{e}]$ et $g'(x) > 0$ sur $]1, \sqrt{e}[$ donc par théorème, $g(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0, \sqrt{e}]$.

9. $g(1.42) \approx 0.498 < \frac{1}{2} < 0.512 \approx g(1.43)$ donc $\alpha \approx 1.43$