# BAC Blanc Terminales STI - 12.12.08 -

Durée : 3 heures
Les calculatrices sont autorisées.
À l'exception du formulaire du BAC, les documents sont interdits.

EXERCICE

Le plan complexe est munis d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1cm. On note $i$ le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i, \quad z_2 = \sqrt{6} + \sqrt{2} + \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) i, \quad Z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

**1.a.** Montrer que $Z \times z_1 = z_2$.

**1.b.** Déterminer le module et l'argument des nombres complexes $Z$ et $z_1$.

**1.c.** En déduire le module et l'argument du nombre complexe $z_2$.

**1.d.** À partir des résultats précédents, déterminer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$. (on justifiera la réponse avec soin).

**2.** On appelle $A, B$ et $C$ les points d'affixes respectives $z_1$, $z_2$ et $z_3 = -z_1$.

**2.a.** Montrer que $A$, $B$ et $C$ sont situés sur un même cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.

**2.b.** Sans utiliser de valeur approchée, et en laissant visibles les éléments de construction, placer avec précision les trois points $A$, $B$ et $C$.

**2.c.** Quelle est la nature du triangle $ABC$ ? (Justifier votre réponse).

**3.** On considère la transformation $\mathcal{R}$ du plan qui au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que

$$z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z$$

**3.a.** Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $\mathcal{R}$.

**3.b.** On note $z_2'$ l'affixe du point $B' = \mathcal{R}(B)$, image de $B$ par la transformation $\mathcal{R}$. Déterminer l'affixe de $B$ sous forme exponnetielle d'une part et sous forme algébrique d'autre part.

**3.c.** À partir des résultats précédents, déterminer les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$. (on justifiera la réponse avec soin).

**4.** Soit $D$ le point d'affixe $z = 3 + iy$ où $y > 0$. On suppose que le triangle $ACD$ est rectangle en $D$. Calculer la valeur exacte de $y$.

Problème

On considère le polynôme

$$P(x) = x^3 + 3x - 14$$

et $f$ la fonction définie pour $x \in ]-\infty, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{x^2 + 1}.$$

La courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est noté $\mathcal{C}_f$.

**1.a.** Calculer $P(2)$.

**1.b.** En déduire qu'il existe trois réels $a, b$ et $c$ tels que l'on ait

$$P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c).$$

Déterminer $a, b$ et $c$.

**2.** Calculer la limite de $f$ en $+\infty$, puis la limite de $f$ en $-\infty$.

**3.a.** Déterminer la fonction dérivée $f'$ de $f$ sur $]-\infty, +\infty[$. Vérifier que :

$$f'(x) = \frac{xP(x)}{(x^2 + 1)^2}.$$

**3.b.** Déduire de 2.$a$. et 1.$b$. que $f'(x)$ est du même signe que $x(x - 2)$, puis donner les variations de la fonction $f$.

**4.a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha$ unique sur l'intervalle $[-3, 0]$.

**4.b.** Donner un encadrement d'amplitude $10^{-2}$ de $\alpha$.

**5.a.** Soit $A$ le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 3. Quelle est son ordonnée ?

**5.b.** Soit $T$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A$. Déterminer une équation de $(T)$.

**6.** Soit $\Delta$ la droite d'équation $y = x - 2$.

**6.a.** Exprimer $f(x) - (x - 2)$ sous forme d'une fraction rationnelle.

**6.b.** Montrer que $\Delta$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

**6.c.** Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\Delta$.

**7.a.** Donner la liste des valeurs $f(x)$ pour $x$ variant de $-8$ à 8, de 1 en 1.

**7.b.** Dans un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1cm, construire les droites $(T)$ et $\Delta$, puis , avec le plus grand soin, représenter la courbe $\mathcal{C}_f$.

# BAC Blanc Terminales STI - 12.12.08 -

Durée : 3 heures
Les calculatrices sont autorisées.
À l'exception du formulaire du BAC, les documents sont interdits.

Exercice

Le plan complexe est munis d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1cm. On note $i$ le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i, \quad z_2 = \sqrt{6} + \sqrt{2} + \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) i, \quad Z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

**1.a.** Montrer que $Z \times z_1 = z_2$.

**1.b.** Déterminer le module et l'argument des nombres complexes $Z$ et $z_1$.

**1.c.** En déduire le module et l'argument du nombre complexe $z_2$.

**1.d.** À partir des résultats précédents, déterminer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$. (on justifiera la réponse avec soin).

**2.** On appelle $A, B$ et $C$ les points d'affixes respectives $z_1$, $z_2$ et $z_3 = -z_1$.

**2.a.** Montrer que $A$, $B$ et $C$ sont situés sur un même cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.

**2.b.** Sans utiliser de valeur approchée, et en laissant visibles les éléments de construction, placer avec précision les trois points $A$, $B$ et $C$.

**2.c.** Quelle est la nature du triangle $ABC$ ? (Justifier votre réponse).

**3.** Soit $B'$ le point d'affixe $z_2' = z_2 - 2z_1$. On considère la transformation $\mathcal{T}$ du plan qui au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que

$$z' = z - 4\sqrt{3} + 4i$$

**3.a.** Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AC}$. Préciser la nature, puis les éléments caractéristiques de la transformation $\mathcal{T}$.

**3.b.** Montrer que $B'$ est l'image de $B$ par $\mathcal{T}$.

**3.c.** En déduire la nature du quadrilatère $ACBB'$.

**3.d.** Placer $B'$ sur la figure de la question 2.$b$. (Ne pas utiliser de valeur approchée, laisser les traits de construction apparents)

**4.** Soit $D$ le point d'affixe $z = 3 + iy$ où $y > 0$. On suppose que le triangle $ACD$ est rectangle en $D$. Calculer la valeur exacte de $y$.