Devoir 5 - 12.12.08 -

Terminale E 1, Lycée Newton, Y. Angeli

Exercice 1 (Bac 2004, 7 points)

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4\sqrt{2}z + 16 = 0.$$

2.a. On considère les nombres complexes :

$$z_A = 4i, z_B = 2\sqrt{2}(1-i) \text{ et } z_C = 2\sqrt{2}(1+i).$$

Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres.

2.b. Le plan est munis d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. Placer dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives z_A,z_B et z_C.

3. À tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe z' par la formule

$$z' = e^{i\frac{3\pi}{4}} \times z.$$

On définit la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

3.a. Quelle est cette transformation ? Donner ses éléments caractéristiques.

3.b. Montrer que $z'_B = z_A$. Que peut-on en déduire pour les points A et B ?

3.c. Calculer z'_A sous la forme $re^{i\theta}$ (avec $r > 0$), puis placer, dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, le point D d'affixe $z_D = z'_A$.

3.d. Démontrer que les ponts A,B,C et D sont sur un cercle dont on précisera le rayon.

Exercice 2 (6 points)
On rappelle que la fonction tangente est définie par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) = 0$. En déduire l'ensemble de définition de tan.
2. Montrer que tan est impaire et π-périodique.
3. Montrer que

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

4. Dresser le tableau de variations de tan sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de tan au point $(0, 0)$.
6. Calculer les valeurs exactes de tan aux points d'abscisses $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

Exercice 3 (7 points)
On considère la fonction définie pour tout x par :

$$g(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}.$$

et on note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique $1cm$.

1. Donner (sans justifier) les valeurs approchées à 10^{-1} de g aux points d'abscisses $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.
2. Calculer la dérivée g' de g.
3. Dresser le tableau de variation de g.
4.a. Donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1.
4.b. Expliquez pourquoi aux points d'abscisse $-\frac{1}{2}$ la courbe $\mathcal{C}_g$ admet une tangente T' horizontale.
5.a. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{3}{2}$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0, 1]$.
5.b. Donner (en justifiant) un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
6. Tracer les tangentes T et T'. Tracer ensuite $\mathcal{C}_g$.