Devoir 2 - Sujet A - 10.10.08 -
Terminale E 1, Lycée Newton, Y. Angeli

Le plan est munis d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1cm. Le point M a pour affixe le nombre complexe $z = x + iy$. On définit :

$$f(z) = \frac{z-5}{z+3}.$$

1. Valeur interdite. (1/1)

a. Pour quel z le nombre $f(z)$ n'est pas défini ? On note z_I cette valeur interdite.

b. Donner la forme exponentielle de z_I.

2. Points fixes de f. (2/1/1/2)

a. Donner les solutions complexes z_A et z_B de l'équation $z^2 + 2z + 5 = 0$.

b. Montrer que z_A et z_B sont les solutions de l'équation $f(z) = z$. Ces solutions sont appelées les points fixes de f.

c. Représenter les points A, B et I d'affixes respectives z_A,z_B et z_I.

d. Montrer que le triangle ABI est isocèle en I.

3. Partie réelle et partie imaginaire de $Z = f(z)$. (3)

a. Montrer par le calcul que :

$$\mathrm{Re}\,(f(z)) = \frac{x^2 + y^2 - 2x - 15}{(x+3)^2 + y^2}, \quad \mathrm{Im}\,(f(z)) = \frac{8y}{(x+3)^2 + y^2}.$$

4. Ensemble des M **d'affixe** z **tels que** $f(z)$ **est réelle**. (1.5/1.5)

a. Montrer que $f(z)$ est réelle si et seulement si $y = 0$ et $(x, y) \neq (-3, 0)$.

b. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M pour lesquels $f(z)$ est réelle. Représenter $\mathcal{D}$ sur le graphique de la question 2.c

5. Ensemble des M **d'affixe** z **tels que** $f(z)$ **est imaginaire pur**. (2/1/1/2)

a. Montrer que $f(z)$ est imaginaire pur si et seulement si $(x-1)^2 + y^2 = 16$ et $(x, y) \neq (-3, 0)$.

b. Calculer $|z-1|^2$ en fonction de x et y.

c. Soit J le point d'affixe 1. Interpréter géométriquement $|z-1|$.

d. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M tels que $f(z)$ soit imaginaire pur. Représenter $\mathcal{C}$ sur le graphique de la question 2.c

Devoir 2 - Sujet B - 10.10.08 -
Terminale E 1, Lycée Newton, Y. Angeli

Le plan est munis d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1cm. Le point M a pour affixe le nombre complexe $z = x + iy$. On définit :

$$f(z) = \frac{z-5}{z-1}.$$

1. Valeur interdite. (1/1)

a. Pour quel z le nombre $f(z)$ n'est pas défini ? On note z_I cette valeur interdite.

b. Donner la forme exponentielle de z_I.

2. Points fixes de f. (2/1/1/2)

a. Donner les solutions complexes z_A et z_B de l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

b. Montrer que z_A et z_B sont les solutions de l'équation $f(z) = z$. Ces solutions sont appelées les points fixes de f.

c. Représenter les points A, B et I d'affixes respectives z_A,z_B et z_I.

d. Montrer que le triangle ABI est isocèle en I.

3. Partie réelle et partie imaginaire de $Z = f(z)$. (3)

a. Montrer par le calcul que :

$$\mathrm{Re}\,(f(z)) = \frac{x^2+y^2-6x+5}{(x-1)^2+y^2}, \quad \mathrm{Im}\,(f(z)) = \frac{4y}{(x-1)^2+y^2}.$$

4. Ensemble des M **d'affixe** z **tels que** $f(z)$ **est réelle**. (1.5/1.5)

a. Montrer que $f(z)$ est réelle si et seulement si $y = 0$ et $(x, y) \neq (1, 0)$.

b. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M pour lesquels $f(z)$ est réelle. Représenter $\mathcal{D}$ sur le graphique de la question 2.c

5. Ensemble des M **d'affixe** z **tels que** $f(z)$ **est imaginaire pur**. (2/1/1/2)

a. Montrer que $f(z)$ est imaginaire pur si et seulement si $(x-3)^2 + y^2 = 4$ et $(x, y) \neq (1, 0)$.

b. Calculer $|z-3|^2$ en fonction de x et y.

c. Soit J le point d'affixe 3. Interpréter géométriquement $|z-3|$.

d. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M tels que $f(z)$ soit imaginaire pur. Représenter $\mathcal{C}$ sur le graphique de la question 2.c