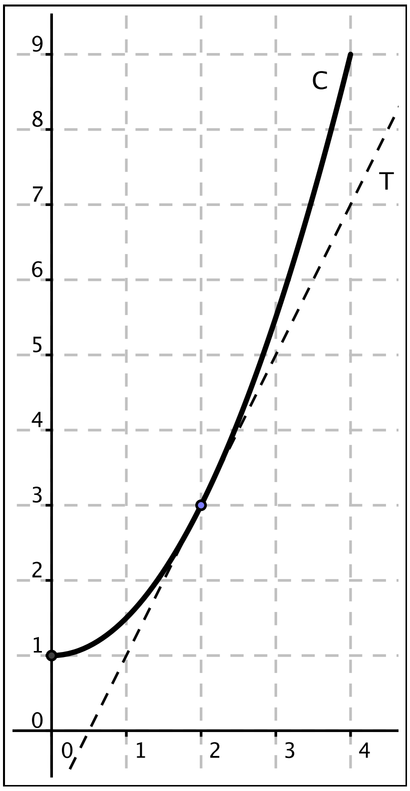
BAC Blanc Terminales STI -03.04.09-

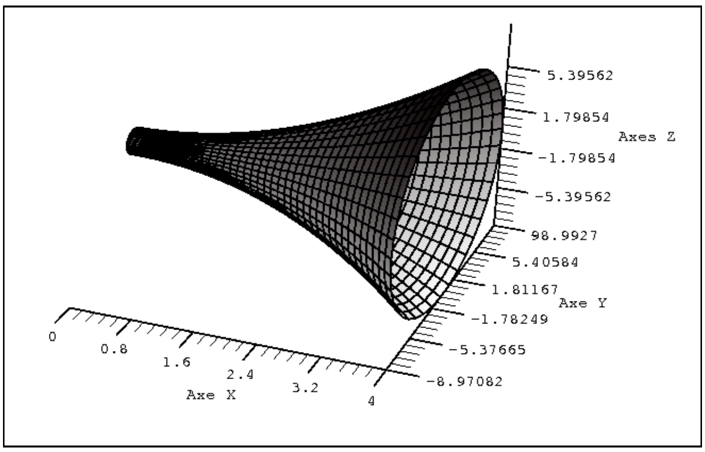
Durée : 3 heures

Exercice 1 (4 points)

Le plan est munis d'un repère orthonormé d'unité graphique 1 *cm. Les éléments de la figure ci-dessous sont la courbe représentative C d'une fonction f définie sur* $[0,4]$*, ainsi que la tangente T à la courbe C au point d'abscisse* 2*.*



1. Graphiquement, déterminer $f(0)$ et $f(2)$.
2. Graphiquement, déterminer $f'(2)$.
3. On admet que pour x réel, f s'écrit
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
avec a, b et c réels. Déterminer a, b et c. *Dans la suite de l'exercice, on pose $f(x) = 0.5x^2 + 1$.*
4. Calculer $[f(x)]^2$ pour x dans $[0;4]$.
5. Calculer l'intégrale $V = \displaystyle\int_0^4 \pi\,[f(x)]^2\,dx$.
(*Le nombre V représente le volume en cm*^{3} *du solide de révolution obtenu par la rotation autour de l'axe Ox de la surface délimitée par C, Ox, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$.*



Exercice 2 (5 points)

Un quadripôle est constitué d'un résistor de résistance R exprimée en Ω et d'un condensateur de capacité C exprimée en μF. On associe respectivement à la tension d'entrée et à la tension de sortie les nombres complexes Z_e et Z_s. On appelle transmittance le nombre complexe Z défini par : $Z = \dfrac{Z_s}{Z_e}$.

On admet que $Z = \dfrac{1}{1 + iRC\omega}$ où ω désigne la pulsation exprimée en radians par seconde et i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Dans tout cet exercice, on suppose que $R = 50\Omega$, $C = 2\mu F$ et $\omega = \dfrac{1}{100} rad.s^{-1}$.

1. Vérifier que $Z = \dfrac{1}{1+i}$; écrire le nombre complexe Z sous forme algébrique puis déterminer le module et un argument de Z.
2. Le module de Z_s peut-il être le double de celui de Z_e ? Justifier la réponse fournie.
3. Dans cette question seulement, on suppose qu'un argument de z_s est $\dfrac{\pi}{2}$; déterminer alors un argument de Z_e.
4. On suppose dans cette question que $Z_e = 150(-\sqrt{3} + i)$.
   (a) Déterminer l'écriture du nombre complexe Z_e sous la forme $re^{i\alpha}$.
   (b) Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe Z_s correspondant.
   (c) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(0; \vec{u}, \vec{v})$ de telle manière qu'un centimètre représente 100 unités. Placer les points M_s et M_e images respectives des nombres complexes Z_e et Z_s.

Problème (11 points)

Dans tout le problème , I désigne l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle I par : $g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$.

1. (a) On note g' la dérivée de la fonction g ; calculer $g'(x)$ et étudier son signe, pour x appartenant à l'intervalle I.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction g.
   Les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$ ne sont pas demandées.
2. Calculer $g(1)$, en déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle I.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par : $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unités graphiques 2 cm.

1. (a) Étudier la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
   (b) Étudier la limite de f en $+\infty$.
2. (a) Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.
   (b) Déduire de la partie A le signe de $f'(x)$ puis le sens de variation de f sur l'intervalle I.
   (c) Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle I.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation : $y = \frac{1}{2}x$.
   (a) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
   (b) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection E de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.
   (c) Sur l'intervalle I, déterminer la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.
4. En utilisant les résultats précédents, tracer avec soin dans le même repère $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$.

Partie C

1. On considère la fonction h définie sur l'intervalle I par : $h(x) = \frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x}$.
   En remarquant que $\frac{\ln x}{x}$ est de la forme $u'(x) \times u(x)$, déterminer une primitive de la fonction h sur l'intervalle I.
2. Hachurer sur le graphique la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, la droite $\mathcal{D}$ et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e^{\frac{1}{2}}$.
   Calculer l'aire exprimée en cm^2, de cette partie hachurée.