Devoir n1 - 19.09.08 -
Terminale E 1, Lycée Newton, Y. Angeli

Le problème qui suit est inspiré d'un exercice posé au Bac, section STI, en 1998.

Le plan munis d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 centimètre. Le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ est noté i.

1. Soit $z_A = -1 - i\sqrt{3}$. et $z_B = \overline{z_A}$.
a. Calculer le module et un argument de z_A.
b. En déduire le module et un argument de z_B.
c. Représenter, en justifiant, le point A d'affixe z_A et le point B d'affixe z_B.

2. Soit $z_C = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.
a. Donner le module et un argument de z_C.
b. Montrer que la forme algébrique de z_C est $z_C = 1 + i$.
c. Représenter graphiquement, en justifiant, le point C d'affixe z_C.

3. Soit
$$z_D = \frac{z_B}{z_C}.$$
a. Mettre z_D sous forme algébrique.
b. Déduire des questions **1.b** et **2.a** le module et un argument de z_D.
c. Mettre z_D sous forme trigonométrique.
d. Déduire des questions **3.b.** et **3.d.** que
$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{et } \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f(x) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cos x + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\sin x.$$
a. Démontrer que l'on peut écrire, pour tout réel x :
$$f(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{12} - x\right).$$
(*indication :* $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$.)
b. Résoudre $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.