
DEVOIR N1 - 19.09.08 -
Terminale E 1, Lycée Newton, Y. Angeli

Le problème qui suit est inspiré d'un exercice posé au Bac, section STI, en 1998.

Le plan munis d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 1 centimètre. Le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ est noté i .

1. Soit $z_A = -1 - i\sqrt{3}$. et $z_B = \overline{z_A}$.
 - a. Calculer le module et un argument de z_A .
 - b. En déduire le module et un argument de z_B .
 - c. Représenter, en justifiant, le point A d'affixe z_A et le point B d'affixe z_B .
2. Soit $z_C = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.
 - a. Donner le module et un argument de z_C .
 - b. Montrer que la forme algébrique de z_C est $z_C = 1 + i$.
 - c. Représenter graphiquement, en justifiant, le point C d'affixe z_C .

3. Soit

$$z_D = \frac{z_B}{z_C}.$$

- a. Mettre z_D sous forme algébrique.
- b. Déduire des questions **1.b** et **2.a** le module et un argument de z_D .
- c. Mettre z_D sous forme trigonométrique.
- d. Déduire des questions **3.b.** et **3.d.** que

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \cos x + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \sin x.$$

- a. Démontrer que l'on peut écrire, pour tout réel x :

$$f(x) = \cos \left(\frac{5\pi}{12} - x \right).$$

(*indication* : $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.)

- b. Résoudre $f(x) = 0$ sur \mathbb{R} .