Devoir Maison 4 : pour le -10-02-11-
Seconde 7, 2010-2011, Y. Angeli

1. Caractérisation vectorielle de l'orthocentre

Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscris et A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Soit H défini par

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

1. Faire une figure pour un triangle scalène (chercher dans le dictionnaire)
2. De quelles droites remarquables O est-il l'intersection ?
3. Montrer que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$.
4. Déduire de la définition de H que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.
5. Les droites (OA') et (BC) sont-elles perpendiculaires ? Pourquoi ? En déduire que (AH) et (BC) sont perpendiculaires.
6. Par un raisonnement analogue, démontrer que les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires.
7. Que représente H pour le triangle ABC ?

2. Caractérisation vectorielle du centre de gravité.

1. Montrer qu'un point G vérifie $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{0}$, si et seulement si $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.
2. En déduire que G existe et est l'image de A par une translation de vecteur que l'on précisera. Construire G
3. Montrer de même que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.
4. En déduire que G appartient à (AA'), (BB') et (CC'). Le point G est un point remarquable du triangle, lequel ?

3. Droite d'Euler.

1. Démontrer que $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA'}$
2. En déduire que $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$
3. Montrer alors que lorsque ABC n'est pas équilatéral, O, G et H sont alignés. Cette droite s'appelle la *droite d'Euler.*
4. Que se passe-t-il lorsque ABC est équilatéral ?