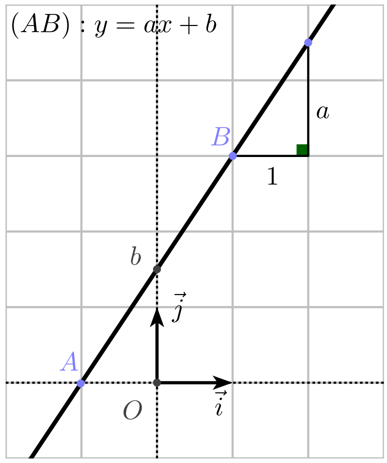
**Chapitre 6 : Fonctions affines -28-01-12-**
**Seconde 7, 2010-2011, Y. Angeli**

## 1. Équation réduite d'une droite

**Théorème.** Dans un repère, soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ tels que $x_A \neq x_B$. Alors la droite $(AB)$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ qui vérifient l'une des équations équivalentes

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A$$

$$\Leftrightarrow y = ax + b \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ b = -ax_A + y_A \end{cases}$$




La seconde équation est l'*équation réduite de la droite* $(AB)$, le nombre réel $a$ est son *coefficient directeur* et le nombre réel $b$ son *ordonnée à l'origine.*

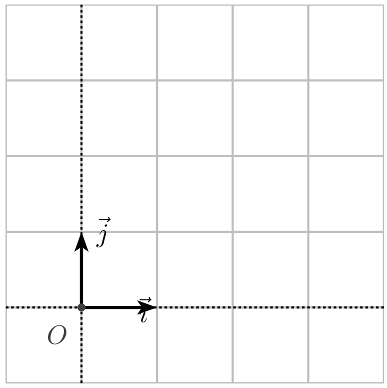
**Preuve.** On a :

$$\begin{aligned}
M \in (AB) &\Leftrightarrow A, B, M \text{ sont alignés} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ colinéaires} \\
&\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \quad (\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = k(x_B - x_A) \\ y - y_A = k(y_B - y_A) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} \\ y - y_A = k(y_B - y_A) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \times (x - x_A) \\
&\Leftrightarrow y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \times (x - x_A) + y_A \\
&\Leftrightarrow y = a \times (x - x_A) + y_A \\
&\Leftrightarrow y = ax - ax_A + y_A \\
&\Leftrightarrow y = ax + b \qquad \square
\end{aligned}$$

**Remarque.** Dans le cas où $x_A = x_B$ et $y_A \neq y_B$, un raisonnement semblable mène à l'équation $x = x_A$.

## 2. Tracé de droites ; lecture graphique d'équations de droites

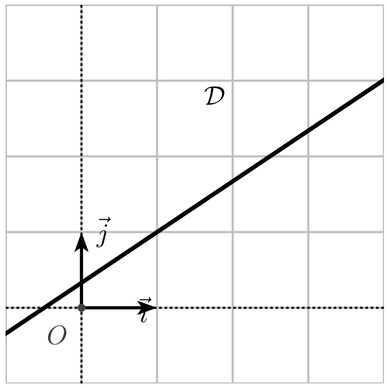
**Méthode.** Pour tracer une droite d'équation $y = ax + b$ on choisit deux abscisses distinctes $x_1 \neq x_2$ et on calcule les ordonnées correpondantes des points de la droite : $A(x_1; ax_1 + b)$ et $B(x_2; ax_2 + b)$. On place les points dans le repère et on trace la droite $(AB)$.




**Exemple.** Tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \dfrac{1}{3}x + 1$.

| | | |
|---|---|---|
| x | | |
| y | | |

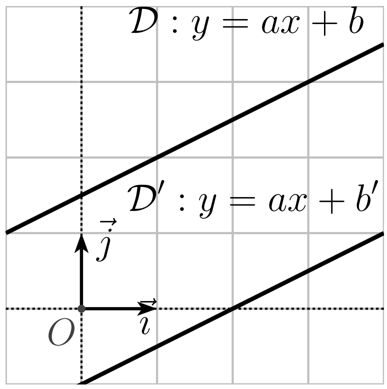
**Méthode.** Pour lire l'équation rédute d'une droite tracée dans un repère, on choisit deux points $A$ et $B$ sur la droite, de préférence avec des coordonnées simples, puis on utilise le théorème du 1. pour déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.




**Exemple.** Déterminer l'équation de $\mathcal{D}$. . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

## 3. Équation d'une parallèle

**Propriété.** Dans un repère, deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur : $a = a'$.




**Preuve.** On choisit deux points sur $\mathcal{D}$ puis $\mathcal{D}'$ :
Les points $A(0; b)$ et $B(1; a + b)$ sont sur $\mathcal{D}$.
Les points $A'(0; b')$ et $B'(1; a' + b')$ sont sur $\mathcal{D}'$.

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}1\\a'\end{pmatrix}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à : $a \times 1 - 1 \times a' = 0 \Leftrightarrow a = a'$. $\square$

**Exemple.** Dans le dernier exemple déterminer l'équation de la droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$ qui passe par $O$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

## 4. Systèmes linéaires, intersections de droites

Dans ce paragraphe, on considère le système, d'inconnues $x$ et $y$ :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} mx + py + q = 0 \\ m'x + p'y + q' = 0 \end{array} \right.$$

**Théorème.** Le système $(S)$ admet un unique couple de solution si et seulement si le *déterminant* $mp' - m'p \neq 0$. Dans le cas contraire, soit il admet une infinité de solutions, soit il n'en admet qu'une seule.

**Preuve.** On suppose d'abord $p, p' \neq 0$. On remarque alors que

$$\begin{aligned} (S) \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} py = -mx - q \\ p'y = -m'x - q' \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -\dfrac{m}{p}x - \dfrac{q}{p} \\ y = -\dfrac{m'}{p'}x - \dfrac{q'}{p'} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = ax + b \text{ où } a = -\dfrac{m}{p};\ b = -\dfrac{q}{p} \\ y = a'x + b' \text{ où } a = -\dfrac{m'}{p'};\ b = -\dfrac{q'}{p'} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Les couples de solutions $(x, y)$ s'interprètent donc comme les coordonnées des points d'intersections des droites $D$ et $D'$ d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$. Or ces droites se coupent en un point unique si et seulement si elles ne sont pas parallèles, donc si et seulement si

$$a \neq a' \Leftrightarrow \frac{m}{p} \neq \frac{m'}{p'} \Leftrightarrow mp' \neq m'p \Leftrightarrow mp' - m'p \neq 0$$

Si $p$ ou $p'$ est nul, on peut résoudre $(S)$ et vérifier que le théorème est vrai dans ce cas. $\square$

**Exemple.** Déterminer si les systèmes suivants admettent une solution unique :

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right. \quad (S_2) : \left\{ \begin{array}{l} 4x - y - 2 = 0 \\ -2x + \dfrac{1}{2}y + 1 = 0 \end{array} \right. \quad (S_3) : \left\{ \begin{array}{l} -x - 2y = 0 \\ 2x + 4y + 1 = 0 \end{array} \right.$$

## 5. Exemple de résolution d'un système linéaire.

Soit $(S) : \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right.$

On a vu que le système admettait un couple de solution unique. On choisit alors l'une des deux méthodes de résolution qui suivent :

### Méthode de substitution

On exprime une inconnue en fonction de l'autre dans l'une des deux équations. Par exemple, $x$ en fonction de $y$ dans la seconde équation :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ x \ominus 2y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ x = \oplus 2y \end{array} \right.$$

On remplace (ou substitue) $x$ par son expression en fonction de $y$ (ici, $2y$) dans la seconde équation, afin de faire disparaître la variable $x$ :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \times (2y) - 2y = 2 \\ x = 2y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6y - 2y = 2 \\ x = 2y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4y = 2 \\ x = 2y \end{array} \right.$$

On résoud la première équation (avec une seule inconnue) et on remplace le résultat dans la seconde :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ x = 2y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ x = 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ x = 1 \end{array} \right.$$

### Méthode de combinaison

On ajoute à une ligne un multiple de l'autre afin de supprimer une inconnue (le résultat est une combinaison des deux lignes) : par exemple on ajoute -3 fois la ligne 2 à la ligne 1 :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y - 3(x - 2y) = 2 - 3 \times 0 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y - 3x + 6y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right.$$

On résoud la première équation (avec une seule inconnue) et on remplace le résultat dans la seconde :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ x - 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ x - 1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ x = 1 \end{array} \right.$$

### Conclusion

Le système admet un couple solution unique $(x, y) = \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

## 6. Fonction affines

**Définition.** Une *fonction affine* est une fonction de la forme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Lorsque $b$ est nulle, la fonction est dite *linéaire*. Lorsque $a$ est nul, la fonction est dite *constante*.

**Propriété.** Dans un repère, la courbe $\mathcal{C}$ représentant une fonction affine $f$ définie par $f(x) = ax + b$ est une droite d'équation $y = ax + b$.

**Preuve.** La courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $y = f(x) = ax + b$. Ainsi $A(0; b)$ et $B(1; a + b)$ appartienent à $\mathcal{C}$.
Or la droite $(AB)$ a pour équation $y = a'x + b'$ où

$$a' = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{a + b - b}{1 - 0} = a \text{ et } b' = -ax_A + y_A = -a \times 0 + b = b$$

donc l'équation de $(AB)$ est $y = ax + b$, et on a bien $(AB) = \mathcal{C}$. □

**Propriété.** Soit $f$ une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$. Alors $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ lorsque $a > 0$, constante si $a = 0$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a < 0$.

**Preuve.** Pour tous réels $x, x'$ tels que $x < x'$ on a :

| • Si $a > 0$ | • Si $a = 0$ | • Si $a < 0$ |
|---|---|---|
| $ax < ax'$<br>donc $ax + b < ax' + b$<br>d'où $f(x) < f(x')$.<br>Donc $f$ est strictement croissante. | $f(x) = b = f(x')$<br>Donc $f$ est constante | $ax > ax'$<br>donc $ax + b > ax' + b$<br>d'où $f(x) > f(x')$.<br>Donc $f$ est strictement décroissante. |

**Propriété.** Soit $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Le signe de la fonction affine $f$ défine par $f(x) = ax + b$ est donné par :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | signe de $-a$ | $0$ | signe de $a$ | |

**Preuve.** On remarque d'abord que $f\left(-\frac{b}{a}\right) = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0$.
On suppose $a > 0$. La fonction $f$ est donc strictement croissante. Ainsi,

$$\text{si } x < -\frac{b}{a} < x' \text{ alors } f(x) < 0 < f(x').$$

De même, si $a < 0$, la fonction $f$ est donc strictement décroissante :

$$\text{si } x < -\frac{b}{a} < x' \text{ alors } f(x) > 0 > f(x'). \quad \square$$