
DEVOIR MAISON VIII POUR LE 25.05.10
Seconde 7, Lycée Newton, Y. Angeli

L'objet du problème est de déterminer les valeurs exactes des cosinus et sinus des angles $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{12}$. Les mesures des angles sont données en radians.

PARTIE A

Soit \mathcal{C} le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ d'unité 5cm , et M le point du cercle associé à un réel x quelconque. On note I' le point de \mathcal{C} diamétralement opposé à I , et H le pied de la hauteur issue de M du triangle $II'M$.

1. Dans cette question seulement, $x = \frac{\pi}{4}$. Faire une figure.
2. Quelle est la nature du triangle $II'M$? Montrer que $\widehat{II'M} = \frac{\pi}{2} - \widehat{II'M}$.
3. Quelle est la nature du triangle IOM ? Montrer que $\widehat{IOM} = 2 \widehat{II'M}$.
4. Justifier les égalités :

$$\bullet I'H = 1 + \cos x \quad \bullet \cos \frac{x}{2} = \frac{I'H}{I'M} \quad \bullet \cos \frac{x}{2} = \frac{I'M}{2}$$

5. En déduire que $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}$.

PARTIE B

1. Donner la valeur en degré de $\frac{\pi}{8}$. Rappeler la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{4}$.
2. Représenter sur la figure, sans l'aide d'un rapporteur et en laissant les traits de construction, le point M_1 associé à $\frac{\pi}{8}$.
3. Démontrer à l'aide de la partie A que $\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. En déduire la valeur de $\sin \frac{\pi}{8}$.
4. Placer les points $M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8$ respectivement associés à $\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$ et donner dans un tableau les cosinus et les sinus de ces angles.
5. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sin x = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

PARTIE C

Donner la valeur en radians de 15° et déterminer les valeurs exactes de $\cos 15^\circ$ et $\sin 15^\circ$.