

DEVOIR MAISON 9 POUR LE -25-01-13-
 Seconde 5, 2012-2013, Y. Angeli

Objectif : prouver l'alignement du centre de gravité, de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit d'un triangle quelconque. La droite obtenue s'appelle la *droite d'Euler*.

Données : Soient ABC un triangle et

- ★ O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .
- ★ A' , B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
- ★ H le point défini par $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ (*).
- ★ G le point défini par $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ (**).

EXERCICE 1. Caractérisation vectorielle de l'orthocentre

- ① Représenter un triangle *scalène* ABC (chercher dans le dictionnaire).
- ② De quelles droites remarquables O est-il l'intersection ? Représenter O .
- ③ Quelle donnée de l'énoncé signifie $\vec{A'B} = \vec{CA'}$? En déduire : $\vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OA'}$.
- ④ Déduire de ③ et la formule (*) que $\vec{AH} = 2\vec{OA'}$. Que dire des droites (OA') et (BC) ?
- ⑤ Les droites (OA') et (BC) sont-elles perpendiculaires ? Pourquoi ? En utilisant la question précédente, montrer que la droite (AH) est la hauteur de ABC issue de A .
- ⑥ Par un raisonnement analogue (qu'on ne demande pas d'écrire), que peut-on dire des droites (BH) et (AC) ? Que représente H pour le triangle ABC ? Construire H .

EXERCICE 2. Caractérisation vectorielle du centre de gravité.

- ① Montrer, en utilisant (**), que le point G vérifie $\vec{GA} + 2\vec{GA'} = \vec{0}$ (méthode de 1. ③).
- ② En déduire $3\vec{GA} + 2\vec{AA'} = \vec{0}$.
- ③ À partir de la formule précédente, exprimer \vec{AG} en fonction de $\vec{AA'}$. En déduire que G est l'image de A par une translation dont on précisera le vecteur. Construire G .
- ④ On admet que l'on peut montrer de même $\vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BB'}$ et $\vec{CG} = \frac{2}{3}\vec{CC'}$. En déduire que G appartient à (AA') , (BB') et (CC') . Que représente G pour le triangle ABC ?

EXERCICE 3. Droite d'Euler.

- ① Démontrer que $\vec{OG} = \vec{OA} - \vec{GA}$.
 On admet que l'on a aussi $\vec{OG} = \vec{OB} - \vec{GB}$ et $\vec{OG} = \vec{OC} - \vec{GC}$.
- ② Déduire de la question précédente, de (*) et (**) que $3\vec{OG} = \vec{OH}$.
- ③ Montrer que les points O , G et H sont alignés. Lorsque ces trois points ne sont pas confondus, la droite formée est la *droite d'Euler*. Représenter cette droite.
- ④ Que se passe-t-il lorsque ABC est équilatéral ?