Chapitre 9 : Fonctions de référence -24-04-13-
Seconde 5, 2012-2013, Y. Angeli

1. Fonction « carré »

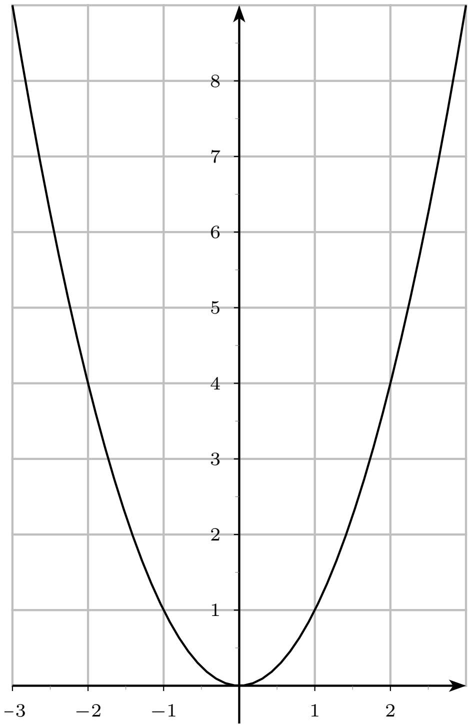
Remarque 1. *Rappels du chapitre 1.* Pour tous réels a et b, on a :

① $(ab)^2 = a^2 \times b^2$ et $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$ si $b \neq 0$. ② $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

③ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ④ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Définition 1. La *fonction carré* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout nombre x associe son carré $x^2 = x \times x$. La courbe représentative de la fonction carré est appelée *parabole.*

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



Remarque 2. *Symétrie.*
La parabole représentative de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ($x = 0$).

En effet, pour tout réel a, les points $A(a; a^2)$ et $B(-a; a^2)$ sont sur la parabole, et l'axe des ordonnées ($x = 0$) est perpendiculaire à la droite (AB) ($y = a^2$). Ces deux droites se coupent $M(0; a^2)$: le milieu de $[AB]$.

Propriété 1.

La fonction carré prend des valeurs positives ($x^2 \geqslant 0$ pour tout x). De plus, $x^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Preuve.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	
x^2		$+$	0	$+$	

Propriété 2.

La fonction carré est :

⋆ strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$

⋆ strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Preuve. Soient $u < v$ deux réels. On a : $v^2 - u^2 = (v-u)(v+u)$.
Comme $u < v$, on a $0 < v - u$. D'après l'égalité précédente, $v^2 - u^2$ est du signe de $v + u$:
• si $0 \leqslant u < v$, $u + v > 0$ et $u^2 < v^2$: la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
• si $u < v \leqslant 0$, $u + v < 0$ et $u^2 > v^2$: la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.

Définition 2. On admet que pour tout $p \geqslant 0$, l'équation $x^2 = p$ admet exactement une solution positive, que l'on appelle *racine carrée* de p et que l'on note $\sqrt{p}$.

Remarque 3. Soit $p > 0$: l'équation $x^2 = p$ admet exactement *deux solutions* $\sqrt{p}$ et $-\sqrt{p}$:
$x^2 = p \iff x^2 - p = 0 \iff x^2 - \sqrt{p}^2 = 0 \iff (x - \sqrt{p})(x + \sqrt{p}) = 0$ (produit nul)

Exemple 1. Résoudre $x^2 = 3$ ....

2. Trinômes et paraboles

Définition 3. Une fonction f est une fonction *trinôme* du second degré s'il existe trois réels a, b, c avec $a \neq 0$ tels que $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout x de l'ensemble de définition de f.
Les *paraboles* sont les courbes représentatives des trinôme du second degré.

Exemple 2. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des trinômes ?

(a) $x \mapsto -x^2 + x + 1$: ....

(b) $x \mapsto 2x^3 + 4x - 7$: ....

(c) $x \mapsto x^2 - 3$: ....

(d) $x \mapsto \dfrac{x^2 + x}{2}$: ....

(e) $x \mapsto (x - 2)^2$: ....

Théorème 3.

Soit a, b, c réels avec $a \neq 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de f dans un repère orthonormé.

① la parabole $\mathcal{P}$ admet la droite verticale d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ comme axe de symétrie.

② $f(0) = c$ (c est l'ordonnée à l'origine de la parabole)

③ si $a > 0$, $\mathcal{P}$ est « tournée vers le haut » : f est décroissante puis croissante.

④ si $a < 0$, $\mathcal{P}$ est « tournée vers le bas » : f est croissante puis décroissante.

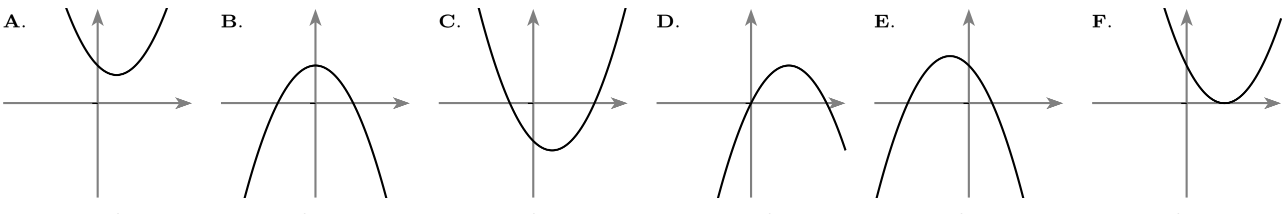
Exemple 3. Soit f le trinôme (a) de l'exemple 2 : $f(x) = -x^2 + x + 1$. Donner une équation de l'axe de symétrie de sa parabole représentative ainsi que son tableau de variations.

....

....

....

Exemple 4. Reconnaître les équations des paraboles :



1. $y = -x^2 + 2x$ **2.** $y = x^2 - 2x + 1$ **3.** $y = x^2 + x + 1$ **4.** $y = -x^2 + 1$ **5.** $y = -x^2 - x + 1$ **6.** $y = x^2 - x - 1$

Exemple 5. Démontrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$. Résoudre $x^2 + x - 12 = 0$.

....

....

....

....

....

....

3. Fonction inverse

Remarque 4. *Rappels du chapitre 1.* Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (non nuls s'ils sont au dénominateur) :

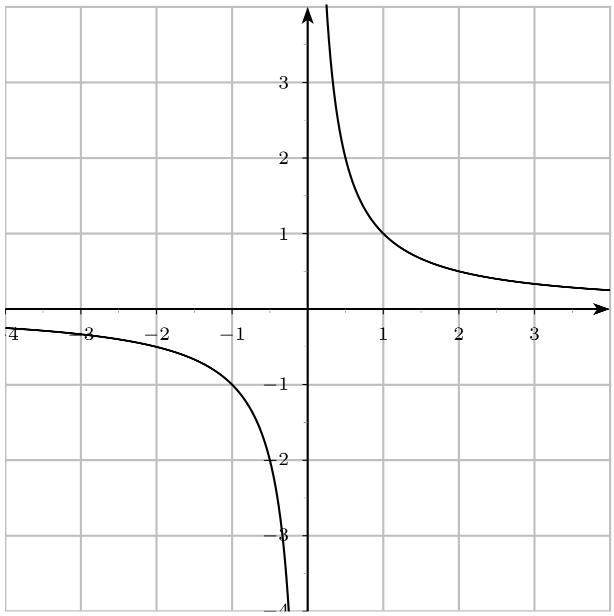
① $a = \dfrac{a}{1}$ ② $\dfrac{a \times c}{b \times c} = \dfrac{a}{b}$ ③ $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$ ④ $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ ⑤ $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{cb}$

Définition 4. La *fonction inverse* est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ qui à tout nombre x associe son inverse :

$$\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$$

La courbe représentative de la fonction inverse est une *hyperbole.*

Remarque 5. *Symétrie*
L'hyperbole qui représente la fonction inverse admet l'origine du repère $O(0;0)$ comme centre de symétrie.
En effet, si $a \neq 0$, $A(a; \frac{1}{a})$ et $A'(-a; -\frac{1}{a})$ sont sur l'hyperbole et le milieu du segment $[AA']$ est l'origine O du repère.



Remarque 6. *Asymptotes*
Les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ sont dites *asymptotes* à la courbe représentative de la fonction inverse.
Cela signifie que la courbe épouse la forme de la droite $x = 0$ pour $x > 0$ voisin de 0 ou $x < 0$ voisin de 0. Au contraire, l'hyperbole épouse l'allure de $y = 0$ pour x très grand dans les positifs ou très grand dans les négatifs.

Propriété 4.

La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est :
⋆ strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$
⋆ strictement décroissante sur $]0; +\infty[$
Son signe est le même que celui de x sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		↘	‖	↘	

Preuve. Soient $0 < u < v$ deux réels. Alors $uv > 0$ donc $\dfrac{1}{uv} > 0$.
On multiplie chaque membre de l'inégalité par $\dfrac{1}{uv}$: $\dfrac{1}{uv} \times 0 < \dfrac{1}{uv} \times u < \dfrac{1}{uv} \times v \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{v} < \dfrac{1}{u}$
Donc la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Un raisonnement analogue s'applique au cas où $u < v < 0$ car $uv > 0$ comme produit de deux nombres strictement négatifs. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

Remarque 7. La valeur 0 n'est pas dans l'ensemble de définition de la fonction inverse. (on ne peut diviser par 0). Cette valeur est une *valeur interdite* pour la fonction, que l'on signale dans les tableaux de signe ou de variation par une « double barre verticale ».

Remarque 8. Attention, la fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R} - \{0\}$!

Contre exemple : ....

4. Homographies et hyperboles

Définition 5. Soient a, b, c, d réels avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$. La fonction

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

est une fonction *homographique*.
Les courbes représentatives des fonctions homographiques sont des *hyperboles*

Remarque 9. Soient n et d deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Soit f est la fonction définie par

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}.$$

L'ensemble des valeurs interdites de la fonction f sont les solutions de l'équation $d(x) = 0$, c'est-à-dire les valeurs qui annulent son dénominateur.

Exemple 6. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x-4}$. Déterminer l'ensemble de définition de f.
Donner son algorithme de calcul et montrer qu'elle est strictement décroissante sur $]2; +\infty[$.

....

....

....

....

....

Exemple 7. Soit $g : x \mapsto \dfrac{2x-5}{2x-4}$. Montrer que pour $x \neq 2$, $g(x) = 1 - f(x)$.
En déduire que g est strictement croissante sur $]2; +\infty[$.

....

....

....

....

....

Remarque 10. En dehors des valeurs interdites, le signe de $\dfrac{n(x)}{d(x)}$ est le même que celui de $n(x) \times d(x)$ (et s'obtient par la règle des signes).

Exemple 8. Résoudre $g(x) \leqslant 0$ puis $1 \leqslant f(x)$.

....

....

....

....

....