Géométrie dans l'espace -03-04-13-
Seconde 5, 2012-2013, Y. Angeli

1. Perspective cavalière

La *perspective cavalière* permet de représenter en deux dimensions (sur une feuille de papier, un tableau) des objets en trois dimensions (un cube, un tétraèdre, etc ...).

Remarque 1. La perspective cavalière obéit à plusieurs règles :
- ⋆ Les lignes visibles sont représentées en traits pleins, les lignes cachées en pointillés.
- ⋆ Les éléments (angles, longueurs) des *plans frontaux* (en face ou perpendiculaires au regard de l'observateur) sont représentés en vraies grandeurs.
- ⋆ Les droites parallèles au regard de l'observateur (appelés *fuyantes*) forment un angle avec l'horizontale fixé (appelé angle de fuite, souvent entre 30° et 60°).
- ⋆ ⚠ en dehors des plans frontaux les angles et les longueurs subissent des déformations et ne sont pas les angles ou longueurs réels.

Exemple 1. Un cube $ABCDEFGH$:

Faces visibles : ....

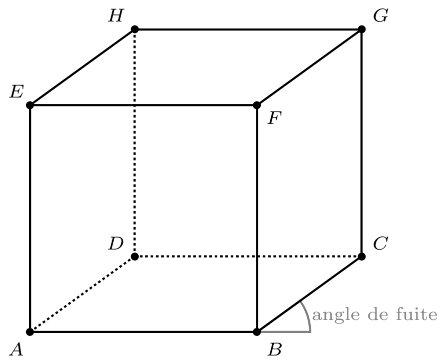
Faces cachées : ....

Faces contenues dans des plans frontaux : ....

Droites fuyantes : ....

Couples de droites non parallèles et non sécantes :

....

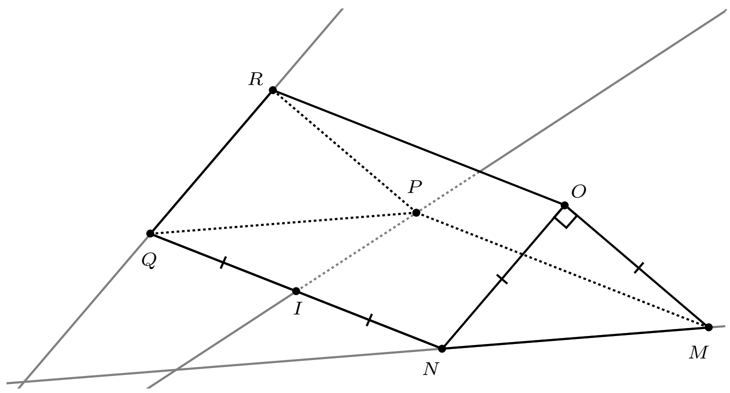


Propriété 1.

En perspective cavalière :
- ⋆ Si deux droites sont parallèles, alors elles sont représentées par deux droites parallèles.
- ⋆ Si trois points sont alignés, alors ils sont représentés par trois points alignés.
- ⋆ Si deux droites sont sécantes, alors elles sont représentées par deux droites sécantes.
- ⋆ Si un point est le milieu d'un segment, alors il est représenté par le milieu du segment.
- ⋆ ⚠ les propriétés réciproque des propriétés précédentes sont fausses en général.

Exemple 2. La figure représente un prisme $MNOPQR$. Le plan (MNO) est frontal et la droite (MP) est une fuyante.

1. Représenter les angles droits.
2. (MN) et (PI) sont-elles sécantes ?
3. (MN) et (QR) sont-elles sécantes ?
4. (QR) et (PI) sont-elles sécantes ?
5. Représenter le centre du prisme
6. Volume du prisme ? ($V = b \times h$).



2. Notion de plan

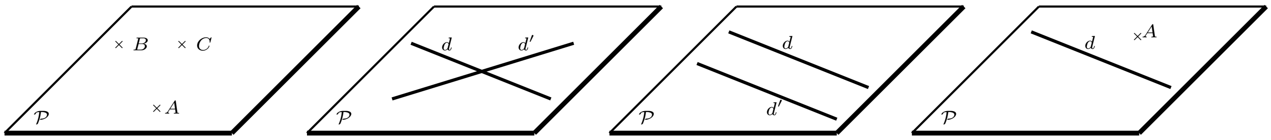
Définition 1. Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace. Le *plan* (ABC) est la réunion des droites parallèles à (AC) qui passent par un point de (AB).
(ABC) est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$ où $x, y \in \mathbb{R}$.

En conséquence :

Propriété 2. Si deux points distincts E et F appartiennent à un plan $\mathcal{P}$, alors la droite (EF) est entièrement contenue dans $\mathcal{P}$.

Preuve. Notons $\mathcal{P} = (ABC)$:
$E \in \mathcal{P}$ et $F \in \mathcal{P}$ donc il existe $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AE} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{AC}$
Si $M \in (EF)$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EM}$ sont colinéaires, donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{EM} = k\,\overrightarrow{EF}$.
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AE} + k\,\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} + k\,\overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{AF} =$
$= (1-k)\overrightarrow{AE} + k\overrightarrow{AF} = ((1-k)x + x')\overrightarrow{AB} + ((1-k)y + y')\overrightarrow{AC}$.
donc $M \in (ABC)$: tout point de (EF) appartient à (ABC).

Propriété 3. Il existe un unique plan $\mathcal{P}$ contenant :



(a) trois points non alignés **(b)** deux droites sécantes **(c)** deux parallèles strictes **(d)** une droite et un point extérieur

Exemple 3. Soit (ABC) un plan, E un point hors de (ABC). Expliquer sans calcul pourquoi les droites (AB) et (CE) ne sont ni confondues, ni sécantes ni parallèles.

....

....

....

Définition 2. Des objets géométriques (points, cercles, droites, etc ...) sont dits *coplanaires* lorsqu'ils sont contenus dans un même plan.

Théorème 4.
Les théorèmes de géométrie plane (Pythagore, Thalès, ...) sont applicables à des objets géométriques coplanaires.

Exemple 4. Le volume d'une pyramide ou d'un cône est $V = \frac{1}{3}b \times h$ où b est la surface de la base et h est la hauteur (distance du sommet à son projeté orthogonal sur le plan de la base).
Déterminer le volume de la pyramide :

....

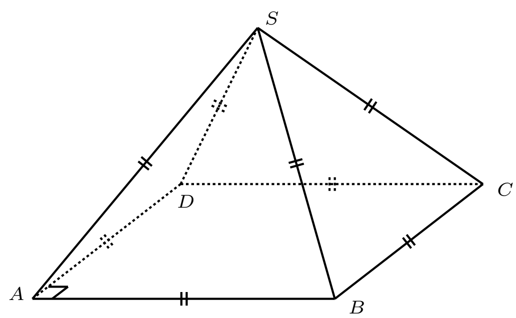
....

....

....

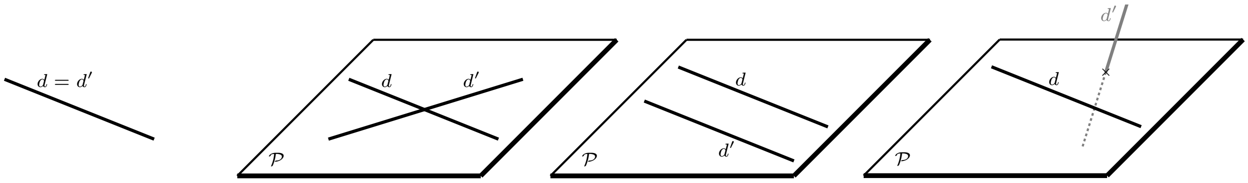
....

....



3. Incidence

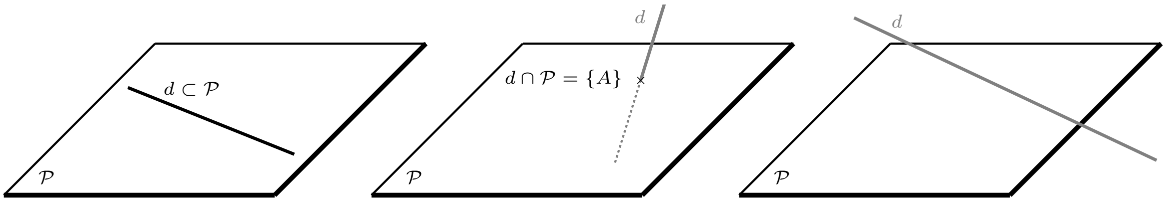
Propriété 5. *Position relative de deux droites*
Deux droites de l'espace d et d' sont dans une et une seule des quatre situations suivantes :



(a) : $d = d'$ parallèles, coplanaires. **(b)** : d et d' *sécantes* $d, d' \subset$ un unique plan. **(c)** : d et d' *parallèles strictes* $d, d' \subset$ dans un unique plan. **(d)** : d et d' non coplanaires ⚠ d et d' ni sécantes, ni parallèles

Preuve. Soient d et d' deux droites et $A, B \in d$ distincts, $C \in d'$. Si $d' \not\subset (ABC)$, on est dans le cas (d), sinon, d et d' sont coplanaires donc parallèles (ou confondues) ou sécantes.

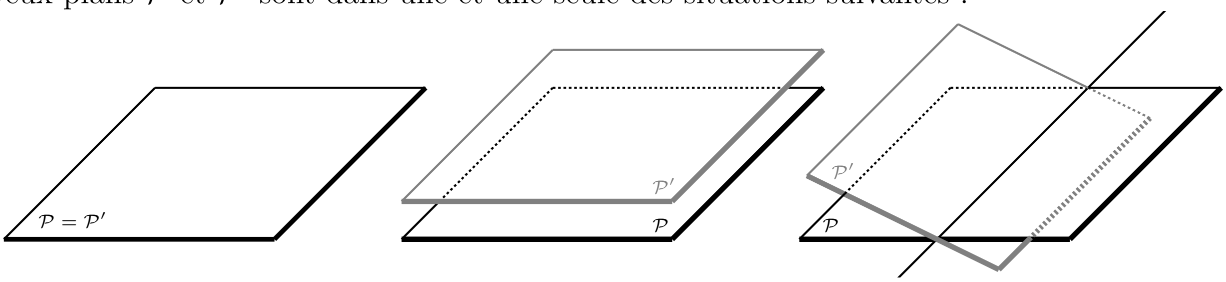
Propriété 6. *Position relative d'une droite et d'un plan*
Une droite d et un plan $\mathcal{P}$ sont dans une et une seule des situations suivantes :



(a) : d contenue dans $\mathcal{P}$ **(b)** : d coupe $\mathcal{P}$ en un point **(c)** : d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$

Preuve. L'intersection d'une droite d et d'un plan $\mathcal{P}$ compte 0, 1 ou au moins 2 points, ce qui correspond respectivement aux situations (a), (b) et (c) d'après la propriété 2.

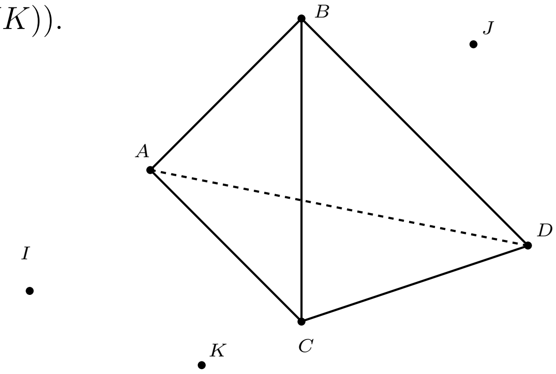
Propriété 7. *Position relative de deux plans*
Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont dans une et une seule des situations suivantes :



(a) : $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ confondus **(b)** : $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ strictement parallèles **(c)** : $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ = une droite

Remarque 2. Le fait que l'intersection de deux plans ne puisse être réduite à deux points est un axiome (un principe admis) de la géométrie dans l'espace.

Exemple 5. Sachant que $I \in (AB)$, $J \in (ABD)$ et $K \in (ACD)$, représenter la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (IJK). (chercher pour chaque face deux points appartenant au plan de la face et à (IJK)).

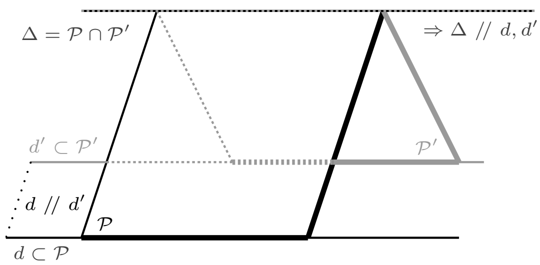


Exemple 6. Citer des droites et plans du cube l'exemple 1 qui illustrent les propriétés 5 à 7.

4. Théorèmes de parallélisme

Théorème 8.

Théorème du toit.
Soient deux plans sécants contenant chacun une droite. Si les droites sont parallèles, l'intersection des plans est une droite parallèle à chacune des droites.



Preuve. On note $\mathcal{P} = (ABC)$ et $\mathcal{P}' = (AB'C')$ où A est un point de l'intersection des plans et $(BC) = d$ est parallèle à $(B'C') = d'$. D'après la définition 1, la droite passant par A parallèle à d est contenue dans (ABC). Cette droite est également parallèle à d', car $d' \ // \ d$. Elle est donc contenue dans $(AB'C')$. L'intersection des deux plans contient donc cette droite, et seulement cette droite : s'il y avait un autre point, les plans seraient confondus d'après la propriété 3.

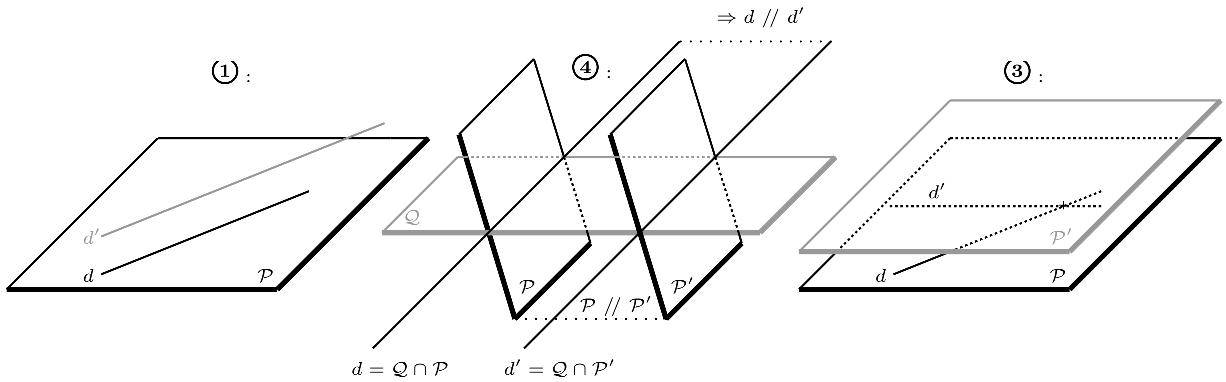
Théorème 9.

① Une droite parallèle à une autre droite contenue dans un plan est parallèle au plan.

② Si deux droites sécantes d'un plan sont parallèles à un autre plan, alors les deux plans sont parallèles.

③ Deux plans parallèles à un même plan sont parallèles entre eux.

④ Si un plan coupe deux plans parallèles, les droites d'intersections sont parallèles.

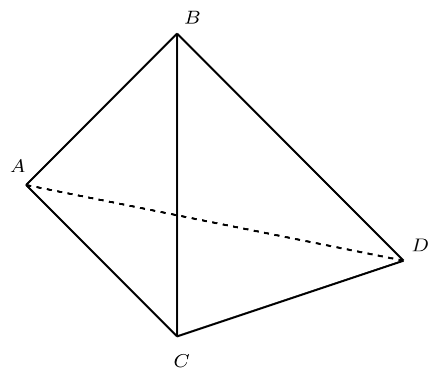


Exemple 7. Soients I, J, K, L, M les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[AD]$ et $[BD]$.

Montrer que $(IJ) \ // \ (LK)$ ....

....

....



Montrer que $(IJK) \ // \ (BD)$ ....

....

....

Montrer que $(IJM) \ // \ (ACD)$ ....

....

....

Prouver $d \ // \ d'$ où $d = (IJM) \cap (BCL)$ et $d' = (ACD) \cap BCL)$.

....

5. Solides

5.1. Section plane d'un solide

Méthode 1. Pour déterminer l'intersection d'un *polyèdre* (solide composé de plusieurs faces) et d'un plan. On procède face par face en

① cherchant deux points communs entre le plan de coupe et le plan contenant la face étudiée. Pour cela, on prolongera parfois les arêtes de la face étudiée et les droites d'intersection des faces étudiées auparavant. (voir l'exemple 5)

② cherchant un point commun entre la face étudiée et le plan de coupe, et en utilisant le théorème 9, point ③ si on connaît déjà l'intersection du plan de coupe avec une face parallèle à la face étudiée. (voir l'exemple 8).

③ cherchant un point commun entre la face étudiée et le plan de coupe, et en utilisant le théorème 8, si l'on sait que l'intersection du plan de coupe et d'une face autre face est parallèle à une droite de la face étudiée. (voir l'exemple 9).

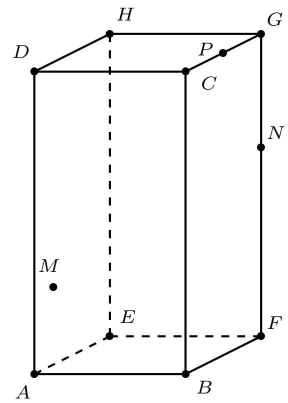
Exemple 8. Représenter la section du parallélépipède suivant par le plan (MNP), sachant que $M \in (AED)$, $N \in [GF]$ et $P \in [CG]$. On justifiera soigneusement l'intersection de (MNP) avec la face $AEDH$.

....

....

....

....



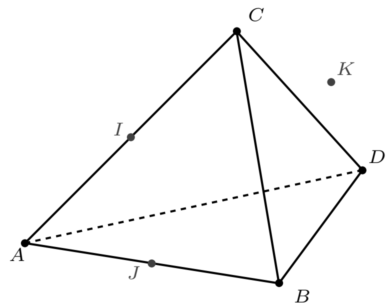
Exemple 9. Représenter l'intersection du tétraèdre avec le plan (IJK), en justifiant soigneusement l'intersection de (IJK) avec la face (BCD). Le point I est le milieu de $[AC]$ et J est le milieu de $[AB]$, enfin $K \in (BCD)$:

....

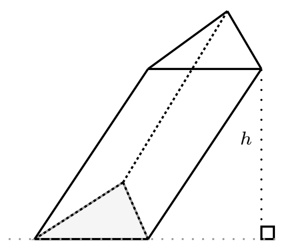
....

....

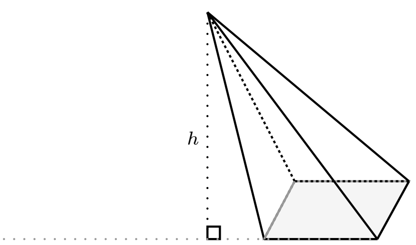
....



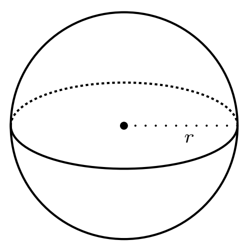
5.2. Volumes de solides



Prisme, cylindre : $V = B \times h$



Pyramide, cône : $V = \frac{1}{3}B \times h$



Sphère : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$