Chapitre 7 : Probabilités -20-03-13-
Seconde 5, 2012-2013, Y. Angeli

1. Vocabulaire

Définition 1. Une *une expérience aléatoire* est un processus dont le résultat est incertain.
On appelle *univers* d'une expérience aléatoire l'ensemble Ω des *issues* possibles de l'expérience (ou *évènements élémentaires*).
Dans ce chapitre, on supposera que l'univers est un ensemble fini.
Définir la *loi de probabilité* d'une expérience aléatoire dont l'univers est fini, c'est associer à chaque issue possible un nombre entre 0 et 1 (sa *probabilité*) qui représente les chances ou les risques que l'expérience aboutisse à ce résultat.
La somme des probabilités de chacune des issues possibles doit valoir 1.

Exemple 1. Lancer une pièce équilibrée est une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{\text{pile,face}\}$.
La probabilité de l'évènement élémentaire « pile » est $\mathbb{P}(\text{pile}) = 0{,}5$ et de même, $\mathbb{P}(\text{face}) = 0{,}5$.
On a bien défini une loi de probabilité : $\mathbb{P}(\text{pile}) + \mathbb{P}(\text{face}) = 1$.

⚠ L'univers Ω n'est pas un nombre, mais un ensemble : dans l'exemple précédent, l'univers Ω est l'ensemble composé des 2 issues « pile » et « face ».

Définition 2. La loi de probabilité d'une expérience aléatoire est dite *équirépartie* si chaque évènement élémentaire a la même probabilité. Si l'univers Ω compte n issues possibles, la probabilité de chacune des issues est donc $\frac{1}{n}$.

Exemple 2. On considère l'expérience aléatoire consistant au lancer d'un dé équilibré.

Quelle indication signifie que la loi de probabilité est équirépartie ? ....

Lister les issues qui composent l'univers de l'expérience : $\Omega =$ ....

Décrire la loi de probabilité de cette expérience :

Issue						
Probabilité						

1.1. Évènement

Définition 3. Étant donnée une expérience aléatoire, un *évènement* A est une partie de l'univers Ω : il est donc composé d'un certain nombre d'issues possibles de l'expérience.
La probabilité d'un évènement A est le nombre noté $\mathbb{P}(A)$ qui est la somme des probabilités de chacunes des issues qui composent l'évènement A. Ce nombre représente la chance ou le risque que l'évènement se produise.

Exemple 3. On reprend l'exemple 2 du dé. Soit A l'évènement « le résultat est strictement plus grand que 4 ». On note $A = \{5, 6\}$ et :
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(5) + \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Soit B l'évènement « le résultat est pair ». $B =$ ....

$\mathbb{P}(B) =$ ....

Propriété 1. Si la loi de probabilité est équirépartie : $\boxed{\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues dans } A}{\text{nombre total d'issues dans } \Omega}}$

2. Opérations sur les évènements

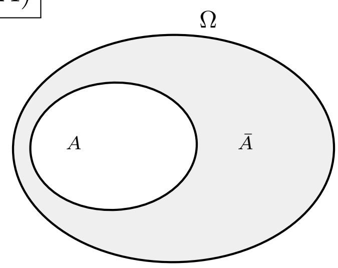
On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω et $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ deux évènements.

2.1. Évènement certain, évènement impossible

L'évènement *certain* Ω est composé de toutes les issues possibles : sa probabilité est $\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$
Il est certain que cet évènement se réalise.
L'évènement *impossible* $\varnothing$ ne contient aucune des issues possibles : sa probabilité est $\boxed{\mathbb{P}(\varnothing) = 0}$
Il est certain que cet évènement ne se réalise pas.

2.2. Évènement contraire

L'évènement *contraire* de l'évènement A est l'évènement $\bar{A}$ composé des toutes les issues de l'univers qui ne sont pas dans A. Sa probabilité est $\boxed{\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)}$



Exemple 4. Expérience 2 (dé) avec $A = \{5, 6\}$.
Décrire $\bar{B}$ par une liste, par une phrase, et donner sa probabilité.

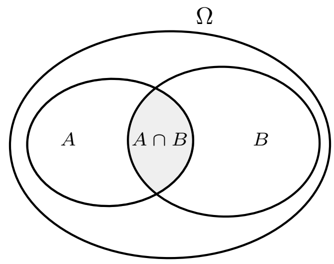
....

....

En général : $\bar{\varnothing} =$ .... $\bar{\bar{A}} =$ ....

2.3. Intersection d'évènements

L'*intersection* des évènements A et B est l'évènement noté $A \cap B$.
Cet évènement est réalisé lorsque A **et** B sont réalisés en même temps.
Lorsque $A \cap B = \varnothing$, A et B sont dits *incompatibles* ou *disjoints*.



Exemple 5. Expérience 2 (dé), avec $A = \{5, 6\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$.
Décrire $A \cap B$ par une liste, une phrase et donner sa probabilité.

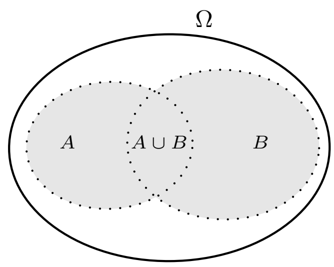
....

....

En général : $\bar{A} \cap A =$......... $A \cap \Omega =$......... $A \cap \varnothing =$.........

2.4. Union d'évènements

L'*union* des évènements A et B est l'évènement noté $A \cup B$, il est réalisé lorsque A **ou** B sont réalisés. (c'est-à-dire si A est réalisé ou B est réalisé ou A et B sont réalisés en même temps).
Une *partition* de l'univers Ω est un ensemble d'évènements deux à deux incompatibles $A_1, ..., A_k$ tels que $A_1 \cup ... \cup A_k = \Omega$. (recouvrement sans superposition).
On a alors : $\boxed{\mathbb{P}(A_1) + ... + \mathbb{P}(A_k) = 1}$.



Exemple 6. Expérience 2 (dé), avec $A = \{5, 6\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$.
Décrire $A \cup B$ par une liste, une phrase, et donner sa probabilité.

....

....

$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) =$ .... $A \cup \bar{A} =$ .... $\overline{A \cup B} =$ ....

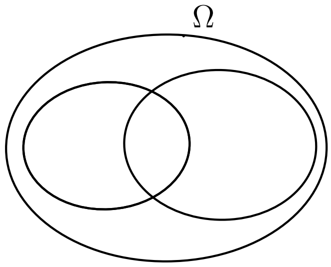
Propriété 2. $\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}$

3. Méthodes de dénombrement

3.1. Tableau à double entrée et diagramme

Un club sportif compte 200 adhérents, dont 160 pratiquent l'activité A et 60 pratiquent l'activité B. On considère l'expérience qui consiste à choisir au hasard un membre du club. Remplir le diagramme et le tableau avec les probabilités appropriées :

	A	$\bar{A}$	Total
B			
$\bar{B}$			
Total			1



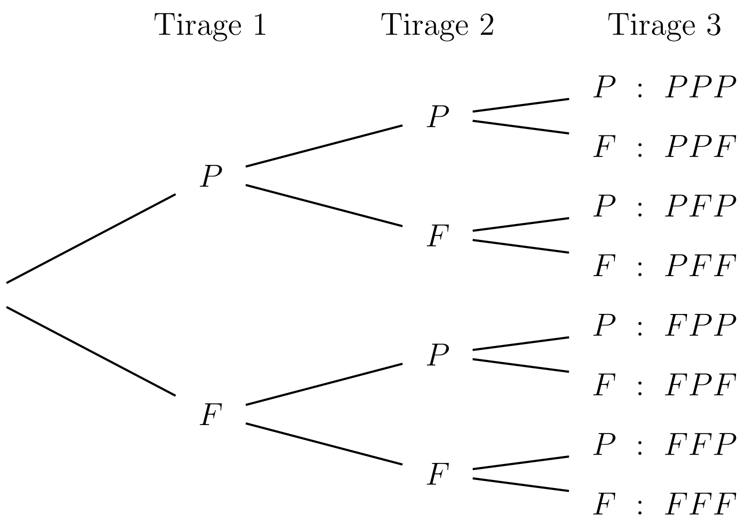
Exprimer à l'aide de A et B l'évènement C : « ne pratiquer aucune des activités » : ....

Calculer $\mathbb{P}(C)$: ....

Remarque 1. Le nombre à l'intersection de la colonne A et de la ligne B est $\mathbb{P}(A \cap B)$. Le total de la colonne A est le nombre $\mathbb{P}(A)$. Enfin, $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1$.

3.2. Dénombrer avec un arbre

L'expérience consiste à lancer trois fois une pièce de monnaie. On note le résultat sous la forme de trois lettres indiquant le résultat de chacun des trois tirages (par exemple, FPF signifie que l'on a obtenu face au premier tirage, pile au second et face au troisième). On modélise toutes les situations par un « arbre » :



Décrire par une liste l'évènement A : « obtenir deux piles ». Calculer $\mathbb{P}(A)$.

....

....

....

Décrire par une liste l'évènement B : « obtenir au moins un pile ». Décrire $\bar{B}$ et calculer $\mathbb{P}(B)$.

....

....

....

3.3. Dénombrer par la « méthode des cases »

Lorsqu'une expérience est le résultat d'une succession d'expériences, on peut dénombrer le nombre d'issues favorables d'un évènement ou de l'univers en multipliant les nombres d'issues des experiences correspondantes :

Exemple 7. On tire de cartes, sans remise, au hasard dans un paquet de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire d'as ?

$\mathbf{\Omega}$: $\underset{\text{carte 1}}{\boxed{32}} \times \underset{\text{carte 2}}{\boxed{31}} = \underset{\text{total}}{992}$ issues. $\mathbf{A}$: $\underset{\text{As 1}}{\boxed{4}} \times \underset{\text{As 2}}{\boxed{3}} = \underset{\text{total}}{12}$ issues.

Donc $\mathbb{P}(A) =$ ....

4. Fluctuations d'échantillonnage

Définition 4. Un expérience de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire à deux issues (succès S et echec $\bar{S}$) dont la probabilité de succès est $\mathbb{P}(S) = p$.

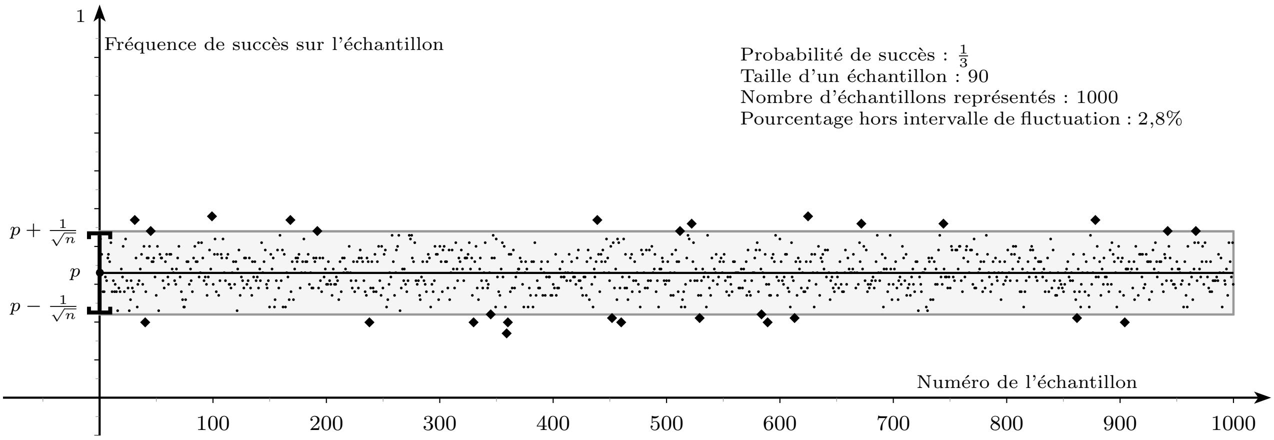
Un *échantillon* de taille n est la liste des résultats de n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes.

La *fréquence observée* des résultats d'un échantillon de taille n est $f = \dfrac{\text{nombre de succès}}{n}$

Exemple 8. Dans l'expérience de lancé d'un dé (l'exemple 2), on considère comme succès l'évènement A : « obtenir au moins 5 » (voir exemple 3). Il s'agit d'une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.
On répète 90 fois l'expérience et on note les résultats : c'est un échantillon de taille 90.
On admet que l'on a obtenu 27 succès dans cet échantillon. La fréquence observée est $\frac{27}{90} = 0{,}3$.

Remarque 2. ⚠ La fréquence observée, un calcul basé sur des résultats réels (chapitre statistique), ne doit pas être confondue la probabilité théorique d'un évènement.

Définition 5. Un *intervalle de fluctuation* au seuil de 0,95 pour n expériences de Bernoulli contient au moins 95% des fréquences observées des échantillons de taille n.



Propriété 3.

On effectue n fois une expérience de Bernoulli de paramètre p. La fréquence observée f de l'échantillon a une probabilité d'au moins 0,95 de vérifier :

$$f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Cet intervalle est un intervalle de fluctuation au seuil de 0,95, centré sur la valeur p.

Exemple 9. Dans l'exemple 8, donner l'intervalle de fluctuation. Interpréter.

....

....

Exemple 10. On considère le teste suivant : on lance 400 fois une pièce et l'on considère que la pièce n'est pas équilibrée si le nombre de « face » n'est pas dans $[180; 220]$. Montrer que la probabilité de rejeter à tord une pièce équilibrée est inférieure à 5%.

....