Chapitre 6 : Fonctions affines -30-01-13-
Seconde 5, 2012-2013, Y. Angeli

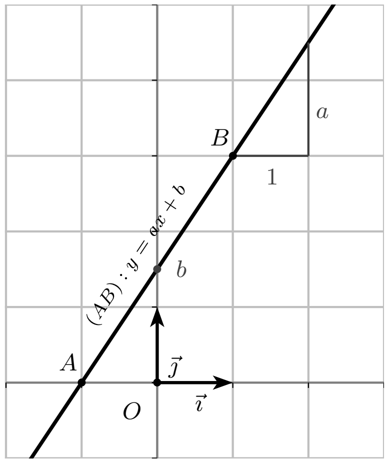
# 1. Équation réduite d'une droite

**Théorème 1.**

Dans un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, soient deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ tels que $x_A \neq x_B$. Alors la droite $(AB)$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient l'une des équations équivalentes

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A$$

$$\iff y = ax + b \quad \text{avec} \begin{cases} a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ b = -ax_A + y_A \end{cases}$$




**Définition 1.** La seconde équation est l'*équation réduite* de la droite $(AB)$, le nombre réel $a$ est son *coefficient directeur* et le nombre réel $b$ son *ordonnée à l'origine*.

**Preuve.**

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\iff A, B, M \text{ sont alignés} \\ &\iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ colinéaires} \\ &\iff (x_B - x_A)(y - y_A) = (y_B - y_A)(x - x_A) \\ &\iff y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \times (x - x_A) \\ &\iff y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \times (x - x_A) + y_A \\ &\iff y = a \times (x - x_A) + y_A \\ &\iff y = ax - ax_A + y_A \\ &\iff y = ax + b \quad \square \end{aligned}$$

**Remarque 1.** Dans le cas où $x_A = x_B$ et $y_A \neq y_B$, ce raisonnement mène à l'équation $x = x_A$.

**Propriété 2.**

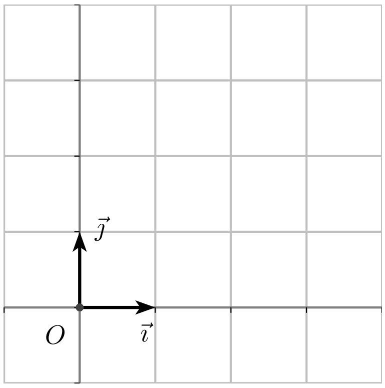
Si $a, b \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{D}$ des points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $y = ax + b$ est une droite affine.

**Preuve.** On considère les points $A(0;b)$ et $B(1;a+b)$ : on a : $a\,x_A + b = a \times 0 + b = b = y_A$ et $a\,x_B + b = a \times 1 + b = a + b = y_B$ donc $A, B \in \mathcal{D}$.
$(AB)$ a pour équation $y = a'x + b'$ où $a' = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{a + b - b}{1 - 0} = a$ et $b' = -a\,x_A + b = b$,
donc par le théorème qui précède la droite $(AB)$ est exactement l'ensemble $\mathcal{D}$. $\square$

**Remarque 2.** Un *vecteur directeur* $\overrightarrow{AB}$ d'une droite $\mathcal{D}$ est un vecteur composé de deux points distincts de la droite. Les vecteurs directeurs d'une droite sont deux à deux colinéaires. Le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}(x_{\vec{u}};y_{\vec{u}})$ est $a = \frac{y_{\vec{u}}}{x_{\vec{u}}}$ si $x_{\vec{u}} \neq 0$.

## 2. Tracé de droites ; lecture graphique d'équations de droites

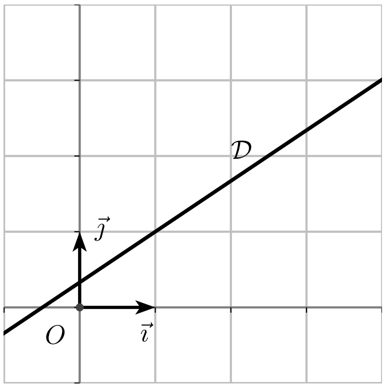
**Méthode 1.** Pour tracer une droite d'équation $y = ax + b$, on choisit deux abscisses distinctes $x_A \neq x_B$ et on calcule les ordonnées correpondantes des points de la droite : $y_A = a\,x_A + b$ et $y_B = a\,x_B + b$. On place les deux points $A$ et $B$ dans le repère et on trace la droite $(AB)$.




**Exemple 1.** Tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x + 2$.

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | | |
| $y$ | | |

**Méthode 2.** Pour lire l'équation rédute d'une droite tracée dans un repère, on choisit deux points $A$ et $B$ sur la droite, de préférence avec des coordonnées simples, puis on utilise les formules du théorème 1 pour déterminer le coefficient directeur $a$ et l'ordonnée à l'origine $b$.




**Exemple 2.** Déterminer l'équation de $\mathcal{D}$ ....................

..........................................................

..........................................................

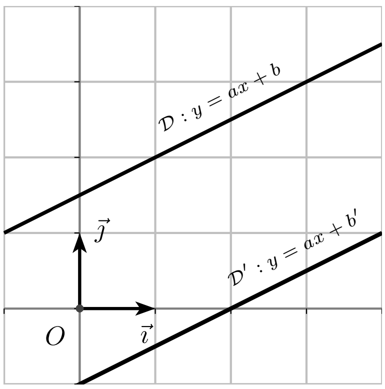
A-t-on $C(0; 0,3) \in \mathcal{D}$ ? ..........................................................

..........................................................................

## 3. Équation d'une parallèle

**Propriété 3.**

Dans un repère, deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur : $a = a'$.




**Preuve.** On choisit deux points sur $\mathcal{D}$ puis $\mathcal{D}'$ :
Les points $A(0; b)$ et $B(1; a + b)$ sont sur $\mathcal{D}$.
Les points $A'(0; b')$ et $B'(1; a' + b')$ sont sur $\mathcal{D}'$.
Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}(1; a)$ et $\overrightarrow{A'B'}(1; a')$ sont colinéaires, ce qui équivaut à : $a \times 1 = 1 \times a' \Leftrightarrow a = a'$. $\square$

**Exemple 3.** Donner l'équation de la droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$ (exemple 2) passant par $O$.

..........................................................................

..........................................................................

..........................................................................

**Exemple 4.** Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ : $y = -x$ sont-elles sécantes ? ............................

..........................................................................

..........................................................................

## 4. Systèmes linéaires, intersections de droites

### 4.1. Définition, opérations sur les systèmes

**Définition 2.** Un *système linéaire de deux équations à deux inconnues* est un système $(S)$ équivalent à

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcll} m\,x + p\,y & = & q & (E_1) \\ m'\,x + p'\,y & = & q' & (E_2) \end{array} \right.$$

où les *coefficients* $m, p, q, m', p', q'$ sont des réels fixés et $x$ et $y$ sont les *inconnues* du système. Un couple $(x; y)$ est un couple solution du système si et seulement si les deux équations sont vérifiées par $x$ et $y$. Lorsqu'il n'existe qu'un $x$ et un $y$ vérifiant en même temps les deux équations du système, on dit que le système admet un couple solution unique.

**Exemple 5.** Parmi ces systèmes, lesquels sont des systèmes linéaires ?

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right. \quad (S_2) : \left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \end{array} \right. \quad (S_3) : \left\{ \begin{array}{l} -x - 2y = 0 \\ 2x^2 + 4y = 0 \end{array} \right. \quad (S_4) : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ x + y = 1 \end{array} \right.$$

..........................................................................................

Théorème 4.

Les opérations suivantes permettent de transformer un système linéaire en un système linéaire équivalent :
- ⋆ *Transformer* une des équations en une équation équivalente (en ajoutant un même nombre aux deux membres, ou en multipliant par un même nombre non nul les deux membres)
- ⋆ *Combiner* deux équations : remplacer une des deux équations par une combinaisons des deux autres $k(E_1) + k'(E_2)$ où $k, k' \neq 0$.
- ⋆ *Substituer* (remplacer) une variable $x$ ou $y$ d'une équation par son expression dans l'autre équation. Il faut avant isoler cette variable dans l'autre équation.

⚠ un système équivalent comportera toujours *deux* équations !

**Exemple 6.** Dans le système $(S_4)$ de l'exemple 5, substituer le $x$ de la première équation dans la seconde équation et résoudre le système.

..........................................................................................

..........................................................................................

**Exemple 7.** Montrer qu'un point $M(x; y)$ appartient à l'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ de l'exemple 4 si et seulement si $x$ et $y$ satisfont le système $(S_2)$ de l'exemple 5.

..........................................................................................

..........................................................................................

Résoudre ce système en remplaçant la seconde équation $(E_2)$ par la combinaison $(E_2) - (E_1)$

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

### 4.2. Unicité des solutions d'un système

**Propriété 5.**

Le système $(S)$ admet un unique couple de solution si et seulement si les coefficients des inconnues ne sont pas proportionnels : $mp' \neq m'p$. Dans le cas contraire, soit il admet une infinité de solutions (si $pq' = p'q$), soit il n'en admet aucune (si $pq' \neq p'q$).

**Preuve.** On suppose d'abord $p, p' \neq 0$. On remarque alors que
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} py = -mx + q \\ p'y = -m'x + q' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{m}{p}x + \frac{q}{p} \\ y = -\frac{m'}{p'}x + \frac{q'}{p'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} sy = ax + b \text{ où } a = -\frac{m}{p};\ b = \frac{q}{p} \\ y = a'x + b' \text{ où } a = -\frac{m'}{p'};\ b = \frac{q'}{p'} \end{cases}$$
Les couples de solutions $(x, y)$ s'interprétent donc comme les coordonnées des points d'intersections des droites $D$ et $D'$ d'équations respectives $y = ax+b$ et $y = a'x+b'$. Or ces droites se coupent en un point unique si et seulement si elles ne sont pas parallèles, si et seulement si $a \neq a' \Leftrightarrow \frac{m}{p} \neq \frac{m'}{p'} \Leftrightarrow mp' \neq m'p$. (Si $p = 0$ ou $p' = 0$, on résout $(S)$ et vérifie la propriété) $\square$

**Exemple 8.** Déterminer le nombre de solutions des systèmes suivants :
$$(S_1) : \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \quad (S_5) : \begin{cases} 4x - y - 2 = 0 \\ -2x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases} \quad (S_6) : \begin{cases} -x - 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \quad (S_7) : \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

...........................................................................................

### 4.3. Résolution par substitution

On isole une inconnue dans une équation. Par exemple, $x$ dans la seconde équation :
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x = \boxed{2y} \end{cases}$$
On remplace (ou substitue) $x$ par son expression en fonction de $y$ (ici, $2y$) dans l'autre équation, afin de faire disparaître la variable $x$ :
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \times \boxed{2y} - 2y = 2 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y - 2y = 2 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 2 \\ x = 2y \end{cases}$$
On résout l'équation avec une seule inconnue et on remplace le résultat dans l'autre :
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

### 4.4. Résolution par combinaison

On multiplie par exemple la première équation par le coefficient de $x$ dans la seconde et on multiplie la seconde équation par le coefficient de $x$ dans la première :
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 1x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \times 3x - 1 \times 2y = 1 \times 2 \\ 3 \times \ x - 3 \times 2y = 3 \times 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases}$$
Les coefficients de $x$ sont identiques, on remplace une équation par la différence des deux :
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3x - 2y - (-6y) = 2 - 0 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases}$$
On résout l'équation avec une seule inconnue et on remplace le résultat dans l'autre :
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 2 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ 3x - 6 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ 3x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{3} = 1 \end{cases}$$
**Conclusion.** Le système admet un couple solution unique $(x; y) = \left(1; \frac{1}{2}\right)$.

## 5. Fonction affines

**Définition 3.** Une *fonction affine* est une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Lorsque $b$ est nulle, la fonction est dite *linéaire*. Lorsque $a$ est nul, la fonction est dite *constante*.

**Remarque 3.** Dans un repère, la courbe $\mathcal{C}$ représentant une fonction affine $f$ définie par $f(x) = ax + b$ est une droite d'équation $y = ax + b$. La droite est dite linéaire si $b = 0$.
La droite est horizontale si $a = 0$. L'équation d'une droite verticale est de la forme $x = c$.

**Propriété 6.**

Soit $f$ une fonction affine définie sur un intervalle $I$ par $f(x) = ax + b$. Alors :
- ⋆ si $a > 0$, $f$ est strictement croissante.
- ⋆ si $a = 0$, $f$ est constante.
- ⋆ si $a < 0$, $f$ est strictement décroissante.

**Preuve.** Pour tous réels $u, v \in I$ tels que $u < v$ on a :
- ⋆ si $a > 0$, $au < av$ donc $au + b < av + b$ d'où $f(u) < f(v)$, donc $f$ strictement croissante.
- ⋆ si $a = 0$, $au = av$ donc $au + b = av + b$ d'où $f(u) = f(v)$, donc $f$ constante.
- ⋆ si $a > 0$, $au > av$ donc $au+b > av+b$ d'où $f(u) > f(v)$, donc $f$ strictement décroissante.

**Théorème 7.**

Soit $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit $f$ la fonction affine défine sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Le signe de $f(x)$ en fonction de $x$ est donné par le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | signe de $-a$ | $0$ | signe de $a$ | |

**Preuve.** On remarque d'abord que $f\left(-\frac{b}{a}\right) = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0$.
On suppose $a > 0$. La fonction $f$ est donc strictement croissante. Ainsi,

$$\text{si } x < -\frac{b}{a} < x' \text{ alors } f(x) < 0 < f(x').$$

De même, si $a < 0$, la fonction $f$ est donc strictement décroissante :

$$\text{si } x < -\frac{b}{a} < x' \text{ alors } f(x) > 0 > f(x'). \quad \square$$

**Remarque 4.** La valeur $-\frac{b}{a}$ n'est pas à connaître par cœur, il suffit de résoudre l'équation $ax + b = 0$ pour la retrouver.

**Exemple 9.** Compléter les tableaux de signes suivants :

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $5-2x$ | | |

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $x - \frac{1}{2}$ | | |

## 6. Inéquation produit

**Remarque 5.** Pour résoudre une équation produit, on utilise la propriété du produit nul : un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

**Méthode 3.** Pour résoudre une inéquation compliquée, on procède ainsi :

① On transforme l'inéquation pour que le membre de droite soit nul.

② On réduit le membre de gauche même dénominateur et on le factorise au maximum.

③ On dresse un tableau de signe de l'expression du membre de gauche :

- (a) La première ligne (ligne des $x$) contient l'ensemble des solutions de l'équation : « membre de gauche égale à zéro » et ses valeurs interdites.
- (b) Les lignes suivantes contiennent le signe de chacun des facteurs du numérateur et du dénominateur du membre de gauche.
- (c) La dernière ligne contient le signe du membre de gauche, obtenu par la règle des signes ($\oplus \times \oplus = \ominus \times \ominus = \oplus$ ; $\oplus \times \ominus = \ominus \times \oplus = \ominus$)
- (d) Ne pas oublier la double barre à la verticale des valeurs interdites.

④ On lit l'ensemble des solutions sur le tableau de signes (les valeurs interdites ne sont jamais solution)

⚠ Ne pas confondre tableau de signes ($+$ ; $-$) et tableau de variations ($\nearrow$ ; $\searrow$).

**Exemple 10.** Résolution de $(2x-7)(3-x) < 0$.
On résout d'abord $f(x) = 0 \iff 2x - 7 = 0$ ou $3 - x = 0 \iff x = \frac{7}{2}$ ou $x = 3$.

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $\frac{7}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-7$ | | $-$<br>-signe de 2 | | $-$<br>-signe de 2 | $0$ | $+$<br>signe de 2 | |
| $3-x$ | | $+$<br>-signe de -1 | $0$ | $-$<br>signe de -1 | | $-$<br>signe de -1 | |
| $(2x-7)\times(3-x)$ | | $-$<br>$\ominus\times\oplus$ | $0$ | $+$<br>$\ominus\times\ominus$ | $0$ | $-$<br>$\oplus\times\ominus$ | |

Une fois le tableau de signes dressé, on peut résoudre des inéquations : on note l'ensemble des $x$ pour lesquels l'expression est de signe « $-$ » : $(2x-7)(3-x) < 0 \iff x \in ]-\infty; 3[ \cup ]\frac{7}{2}; +\infty[$.

**Exemple 11.** Résoudre $\dfrac{1+x}{4-3x} \geqslant 0$.

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |