Chapitre 5 : Vecteurs -19-12-12-
Seconde 5, 2012-2013, Y. Angeli

1. Vecteurs dans un repère orthonormé, définitions

Définition 1. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$.
- ⋆ Un *vecteur* $\vec{u}$ du plan est défini par deux coordonnées $(x; y)$.
- ⋆ Le *vecteur nul* $\vec{0}$ est le vecteur de coordonnées $(0; 0)$.
- ⋆ Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées.
- ⋆ Deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ définissent un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$.
  Le point A est l'*origine* du vecteur, le point B son *extremité*.
  Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.
  ⚠ L'ordre est important : « coordonnées de l'extrémité moins celles de l'origine ».
- ⋆ On représente le vecteur $\vec{u}(x; y)$ par une flèche. Un vecteur a une infinité de représentants, mais si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ on aura toujours $x = x_B - x_A$ et $y = y_B - y_A$.

Exemple 1. Lire les coordonnées de

B : .... D : ....

$\overrightarrow{EF}$: .... $\overrightarrow{OI}$: ....

$\overrightarrow{DC}$: .... $\overrightarrow{CB}$: ....

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{DB}$

....

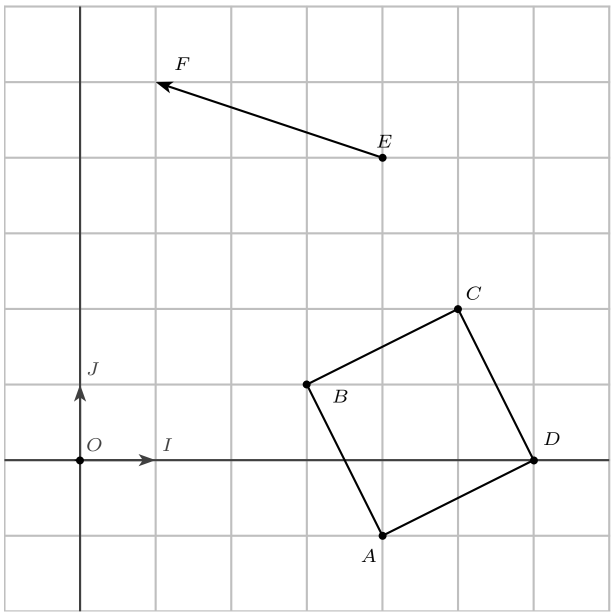
....

Lire celles de $\overrightarrow{BD}$: ....

Ajouter les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$.

....

Qu'obtient-on ? ....



Définition 2. La *translation* de vecteur $\vec{u}(x; y)$ est une transformation du plan qui à tout point $A(x_A; y_A)$ associe le point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$.
En particulier, les coordonnées de A' sont $(x_A + x_{\vec{u}}; y_A + y_{\vec{u}})$.

Exemple 2. Représenter l'image du carré $ABCD$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.

Calculer les coordonnées de M, image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$. ....

....

Définition 3. La *somme* de deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ de coordonnées $(x + x'; y + y')$.
Le *produit* du vecteur $\vec{u}(x; y)$ et du nombre réel a est le vecteur noté $a\,\vec{u}$ de coordonnées $(ax; ay)$. ⚠ Le produit, le quotient de deux vecteurs n'est pas défini !

Remarque 1. On notera $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé $(O; I; J)$ tel que $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$

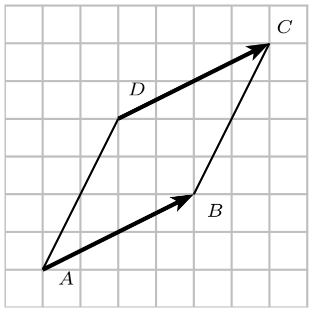
Exemple 3. Représenter les vecteurs : • $\vec{\imath} + \overrightarrow{DC}$ • $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ • $-\vec{\imath} = -1 \times \vec{\imath}$ • $2\,\overrightarrow{BC}$.

2. Interprétation géométrique

2.1. Vecteurs et parallélogrammes

Propriété 1.

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Le parallélogramme peut-être éventuellement « plat ».
⚠ attention à l'ordre des sommets.



Remarque 2. B est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$ si et seulement si $ABCD$ parallélogramme $\iff$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Preuve. $ABCD$ est un parallélogramme $\iff$ $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu $\iff$
$\begin{cases} \frac{x_B+x_D}{2} = \frac{x_A+x_C}{2} \iff x_B + x_D = x_A + x_C \iff x_B - x_A = x_C - x_D \iff x_{\overrightarrow{AB}} = x_{\overrightarrow{DC}} \\ \frac{y_B+y_D}{2} = \frac{y_A+y_C}{2} \iff y_B + y_D = y_A + y_C \iff y_B - y_A = y_C - y_D \iff y_{\overrightarrow{AB}} = y_{\overrightarrow{DC}} \end{cases}$
$\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ □

Exemple 4. Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, $A(3; 4)$ et $B(4; 4)$.

Montrer que $OIBA$ parallélogramme : ....

....

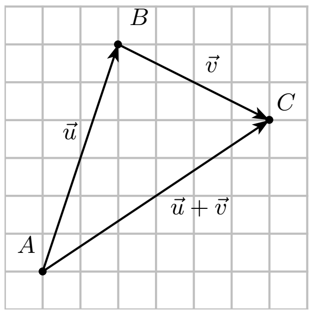
....

....

2.2. Enchaînement de translations et somme de vecteurs

Théorème 2.

Relation de Chalses. Pour tous A, B, C du plan, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
En conséquence, l'enchaînement de deux translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



Preuve. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ sont :
$x_{\overrightarrow{AB}} + x_{\overrightarrow{BC}} = x_B - x_A + x_C - x_B = x_C - x_A = x_{\overrightarrow{AC}}$ (idem pour y) □

2.3. Vecteurs et distances

Définition 4. La *norme* d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre $||\overrightarrow{AB}|| = AB$. C'est la distance entre l'origine et l'extrémité du vecteur :

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{x^2_{\overrightarrow{AB}} + y^2_{\overrightarrow{AB}}}$$

Exemple 5. Dans l'exemple 1, calculer $||\overrightarrow{DC}||$ et $||\overrightarrow{CB}||$. Si $DC = CB$ a-t-on $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CB}$?

....

....

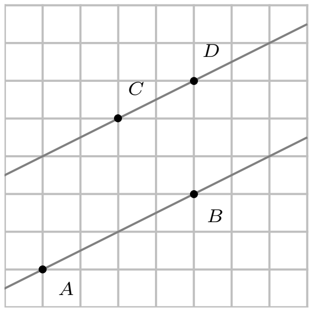
....

3. Colinéarité

Définition 5. La *direction* d'un vecteur $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ est l'ensemble des droites parallèles à $\overrightarrow{AB}$. Deux vecteurs sont dits *colinéaires* si et seulement s'ils ont même direction (ou l'un est nul).

Propriété 3.

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont *colinéaires*
$\iff$ les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
(ou deux points sont confondus)
$\iff$ les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont proportionnelles
$\iff$ $x_{\overrightarrow{AB}} y_{\overrightarrow{CD}} = y_{\overrightarrow{AB}} x_{\overrightarrow{CD}}$ (produit en croix)
$\iff$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$ (ou $k\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$)



Preuve. La première équivalence vient de la définition, la suivante du théorème de Thalès et les trois dernières sont des reformulations de la proportionnalité des coordonnées. □

Exemple 6. Montrer que les droites ci-dessus sont parallèles ....

....

....

Propriété 4.

Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Preuve. Les deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si (AB) et (AC) sont parallèles (ou deux points sont confondus), ce qui équivaut à (AB) et (AC) confondues puisqu'elles ont un point commun. □

Exemple 7. Soient $B(\sqrt{2}; 2)$, $C(2; \sqrt{2}+1)$ et $A(0; 1)$. Montrer qu'ils sont alignés ....

....

....

....

Propriété 5.

M est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \iff \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} \iff \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Définition 6. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires et non nuls sont de *même sens* si et seulement si $\vec{u} = k\,\vec{v}$ avec $k > 0$. Ils sont de *sens contraire* si $k < 0$.

Exemple 8. Montrer que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ ....

....

Soient $A(2; -1)$ et $B(4; -3)$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{AB}$. Conclusion ? ....

....

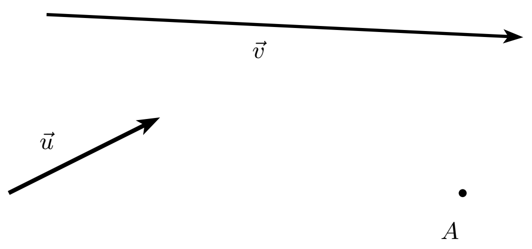
Propriété 6.

Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont même direction, même sens et même norme.

4. Vecteurs sans coordonnées

Remarque 3. On peut travailler avec des vecteurs mêmes lorsque le plan n'est pas muni d'un repère orthonormé. La caractérisation d'un parallélogramme, la relation de Chasles, le critère de parallélisme, d'alignement, de reconnaissance des milieux sont encore valables.

Exemple 9. En se basant sur la caractérisation des parallélogrammes, construire l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$, la somme $\vec{u}+\vec{v}$, le vecteur $\frac{1}{2}\vec{v}$ et le vecteur $-\vec{u}$.



Méthode 1. Toujours faire une figure!
Pour traiter un problème de géométrie avec des vecteurs, on traduit d'abord les données et la conclusion en termes de vecteurs : en utilisant les critères des parallélogrammes, la définition de translation, le critère du milieu, d'alignement, de parallélisme...
On essaie ensuite de montrer l'égalité de conclusion, en partant de l'un des membres et en utilisant les hypothèses et la relation de Chasles dans les étapes de calcul.

Exemple 10. *Démonstration du théorème de la droite des milieux*
Dans un triangle ABC, soient I, J les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

I milieu de $[BA]$ $\iff$ ....

J milieu de $[AC]$ $\iff$ ....

$\overrightarrow{IJ} =$ .... (Chasles)

$=$ .... « I milieu de $[BA]$ »

$=$ .... « J milieu de $[AC]$ »

$=$ .... (factoriser par 1/2)

$=$ .... (Chasles)

....

....

Qu'en conclure pour (IJ) et (BC) ?