CHAPITRE 3 : FONCTIONS -17-10-12-
Seconde 5, 2012-2013, Y. Angeli

1. Vocabulaire

Définition 1.
• Définir une *fonction* f sur un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, c'est associer à chaque nombre $x \in \mathcal{D}$ un nouveau nombre noté $f(x) \in \mathbb{R}$.
• L'ensemble $\mathcal{D}$ est l'*ensemble de définition* de la fonction f.
• Le nombre $f(x)$ est l'*image* du nombre réel x par la fonction f.
• La *courbe représentative* $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère $(O; I; J)$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $x \in \mathcal{D}$ et $y = f(x)$.

⚠ Ne pas confondre les notations f (une fonction), $f(x)$ (un nombre) et $\mathcal{C}_f$ (une courbe).

Remarque 1. L'image d'un nombre x est donc $y = f(x)$ et se lit graphiquement sur l'axe des ordonnées (« axe des y »)

Exemple 1. *Fonction donnée par sa courbe*
La courbe $\mathcal{C}_f$ représente une fonction f.

• Ensemble de définition de f : $\mathcal{D} =$ ....

• Images : $f(3) = 2$

$f(-1) =$ ....

$f(0) =$ ....

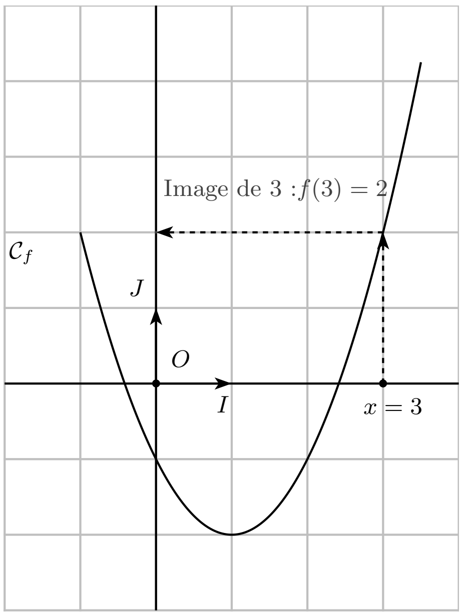
$f(1) =$ ....

$f(2) =$ ....

$f(0{,}25) \approx$ ....

• Maximum de la fonction f ? ....

• Minimum de la fonction f ? ....



Exemple 2. *Fonction donnée par son expression*
Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 1$ alors $g(3) = 2 \times 3 - 1 = 5$ (on remplace x par 3).

Exemple 3. *Fonction donnée par son expression*

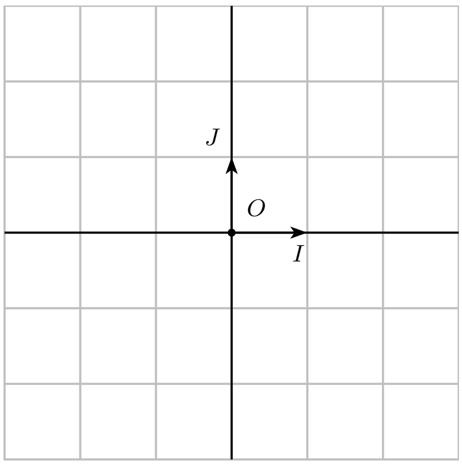
Soit $h : [-3\,;3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2 - \dfrac{x^2}{2}$

• Ensemble de définition de h : $\mathcal{D} =$ ....

• Images :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$							

• À partir de ce tableau, représenter la courbe de h :



2. Antécédents

Définition 2. Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. L'ensemble des *antécédents* d'un réel y par la fonction f est l'ensemble des $x \in \mathcal{D}$ tels que $f(x) = y$, ou encore l'ensemble des x qui ont pour image y par la fonction f.

⚠ Alors qu'un nombre $x \in \mathcal{D}$ n'a qu'une seule image par la fonction f, un nombre y peut avoir un, plusieurs ou aucun antécédent par la fonction f.

Remarque 2. Les antécédents sont les solutions x de l'équation $y = f(x)$. Graphiquement, ils se lisent sur l'axe des absisses. (« axe des x »)

Exemple 4. *Fonction donnée par sa courbe*

La courbe $\mathcal{C}_f$ représente une fonction f.

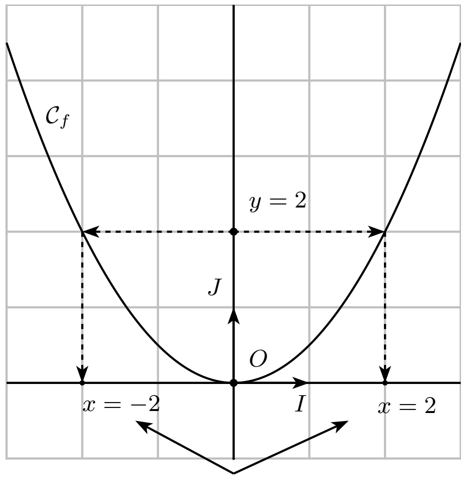
- Ensemble de définition de f : $\mathcal{D} =$ ....
- Images : $f(-1) =$ .... $f(0) =$ ....
- Ensemble des Antécédents de 2 : $\{-2, 2\}$

de 4,5 : ....

de 0,5 : ....

de 0 : ....

de -1 : ....



Antécédents de 2 : $\{-2, 2\}$

Exemple 5. *Fonction donnée par son expression*
Soit $h : [-2, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$.

$h(3) =$ ....

$h(-2) =$ ....

Antécédents de -1 : ....

....

Antécédents de 0 : ....

....

Antécédents de 2 : ....

....

Antécédents de 9 : ....

....

Remarque 3. Résoudre l'inéquation $f(x) > 3$, c'est déterminer les antécédents des $y > 3$ par la fonction f.

Exemple 6. On considère la fonction f représentée dans l'exemple 4. Résoudre :

$f(x) \leqslant 2$ ....

$f(x) > 0,5$ ....

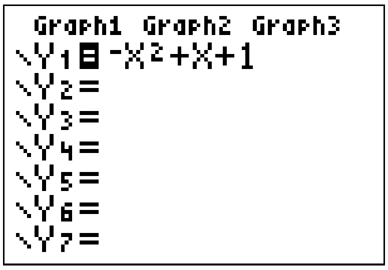
$f(x) < 5$ ....

$f(x) > 0$ ....

$f(x) < 0$ ....

3. Utiliser la calculatrice

3.1. Programmer une fonction f

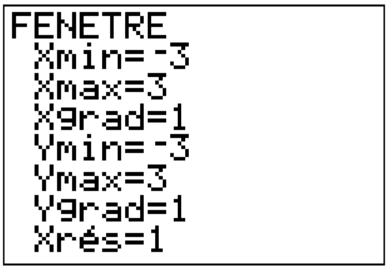


Les noms de fonctions dans la calculatrice sont Y_1,...,Y_9. Pour programmer la fonction f, on tape $\boxed{\text{Y=}}$ puis on saisit l'expression de la fonction.

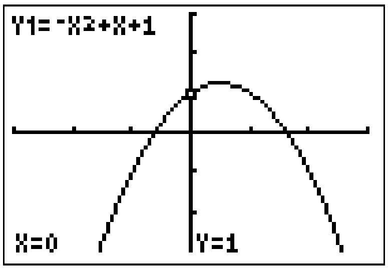
On revient au mode « normal » par : $\boxed{\text{2nde}}$+$\boxed{\text{Quitter}}$

⚠ s'assurer qu'aucun graphique statistique (première ligne) n'est selectionné : c'est la source d'erreurs de « dimension ».

3.2. Afficher la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f



On choisit la fenêtre d'affichage par $\boxed{\text{Fenêtre}}$.
Il faut définir l'amplitude des abscisses (de Xmin à Xmax), l'unité des graduations (Xgrad), et faire de même pour les ordonnées.
⚠ Si Xmin> Xmax (ou Ymin> Ymax), on provoque une erreur. De même, si on utilise l'opération moins au lieu du signe moins, on provoque une erreur.



Utiliser la touche $\boxed{\text{Graphe}}$ pour afficher la courbe.

La fonction $\boxed{\text{Trace}}$ permet de parcourir la courbe et de conjecturer des valeurs approchées d'images ou d'antécédents.

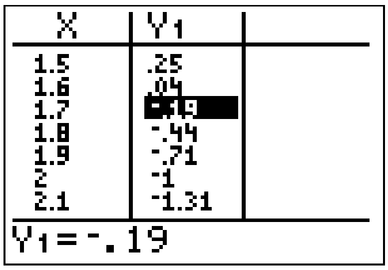
⚠ Si rien ne s'affiche : vérifier l'expression de f et la fenêtre !

3.3. Afficher un tableau des valeurs $f(x)$ prises par la fonction f

On choisit le *début de la table* et le *pas* (de combien en combien souhaite-t-on afficher les valeurs de x ?) par $\boxed{\text{2nde}}$+$\boxed{\text{DefTbl}}$.

Par exemple, pour afficher les $f(x)$ à partir de $x = 1{,}5$ de 0,1 en 0,1 : voir ci-contre.

Cette méthode permettera aussi d'obtenir la valeur de $f(1{,}5)$.



Utiliser la fonction $\boxed{\text{2nde}}$+$\boxed{\text{Table}}$ pour afficher le tableau de valeurs, et les flèches pour les faire défiler. Ici on voit que $f(1{,}6) < 0 < f(1{,}7)$ on peut donc conjecturer l'existence d'au moins un antécédent x à 0 tel que $1{,}6 < x < 1{,}7$.

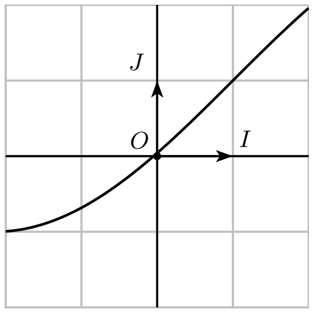
4. Variations des fonctions

Définition 3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que la fonction f est *strictement croissante* sur I si,

$$\text{pour tout } u, v \in I, \text{ si } u < v, \text{ alors } f(u) < f(v).$$

- $f(u)$ et $f(v)$ sont dans le même ordre que u et v.
- La courbe représentative de f semble monter.
- f préserve le sens des inégalités.



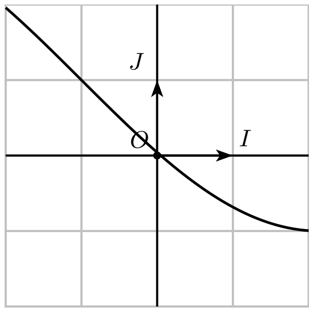
Exemple 7. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2$ est strictement croissante : si $u < v$ alors $u + 2 < v + 2$ donc $f(u) < f(v)$.

Définition 4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que f est *strictement décroissante* si,

$$\text{pour tout } u, v \in I, \text{ si } u < v, \text{ alors } f(u) > f(v).$$

- $f(v)$ et $f(u)$ sont dans l'ordre inverse de u et v.
- La courbe représentative de f semble descendre.
- f inverse le sens des inégalités.

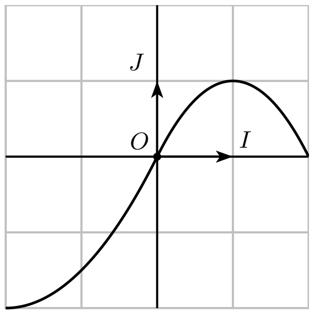


Exemple 8. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x$ est strictement décroissante : si $u < v$ alors $-u > -v$ donc $g(u) > g(v)$.

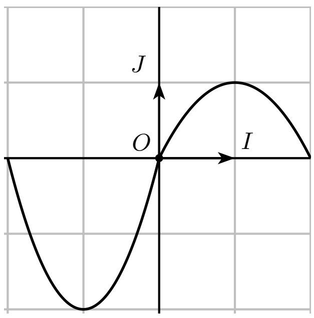
Définition 5. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- Le *maximum* de f sur I est la plus grande image $f(x)$ pour $x \in I$.
- Le *minimum* de f sur I est la plus petite image $f(x)$ pour $x \in I$.

Remarque 4. Le sens de variation de f est résumé dans un *tableau de variation* :

x	-2		1		2
f	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Exemple 9. Dresser le tableau de variations de la fonction ci-contre :



Exemple 10. *Démontrer un sens de variation*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -2x + 1$.
Démontrons en utilisant la définition que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$:
Pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, si $u < v$ alors $-2u > -2v$ donc $-2u + 1 > -2v + 1$, ainsi $f(u) > f(v)$ donc, par définition, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

5. Algorithme de calcul

Méthode 1. Obtenir l'*algorithme de calcul* d'une fonction f, c'est donner le cheminement des opérations élémentaires qui permettent de passer de x à $f(x)$, en tenant compte des priorités.

Exemple 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -2x + 8$ a pour algorithme de calcul :

$$x \xrightarrow{\times(-2)} -2x \xrightarrow{+8} -2x + 8 = f(x)$$

Exemple 12. Élaborer l'algorithme de calcul de $f :]2; +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto 2 - \dfrac{1}{2-x}$:

$x \longrightarrow$

Démontrer en utilisant les étapes précédentes que f est strictement décroissante sur $]2; +\infty[$.

....

....

....

....

....

Exemple 13. Dans le programme ci-contre :

Quel est le résultat lorsque l'utilisateur choisit $X = 2$? .....

....

Quel nombre $f(X)$ affiche le programme en général ? ....

....

```
Saisir X
X prend la valeur X+2
X prend la valeur −2X
Afficher X
```

6. Complément : démontrer une égalité

Méthode 2. Pour démontrer une égalité de deux quantités qui dépendent d'une variable x, on commence par donner le domaine de validité du calcul (pour tout $x \in]0; +\infty[$ par exemple) puis on part de l'un des membres de l'égalité, et on aboutit après des simplifications et un enchaînement d'égalités à l'autre membre.

Exemple 14. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$:

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ (x-3)(x+2) = x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - x - 6$$

Exemple 15. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, on a $\dfrac{3-2x}{2-x} = 2 - \dfrac{1}{2-x}$.

....

....

....

....

Déduire de l'exemple 12 le sens de variations de $g :]2; +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{3-2x}{2-x}$

....