Chapitre 2 : Géométrie -26-09-12-
Seconde 5, 2012-2013, Y. Angeli

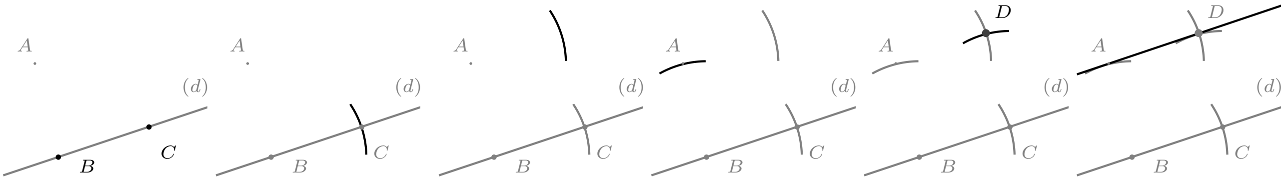
1. Parallélisme

Définition 1. Deux droites (d) et (d') sont *parallèles* lorsqu'elles n'ont aucun point commun ou lorsqu'elles sont confondues. On le note (d) // (d').
Lorsque ce n'est pas le cas, les deux droites sont *sécantes* et se coupent en un seul point.

Propriété 1. Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.

1.1. Construction

Étapes de la construction de la droite parallèle à (d) passant par A :



1. Choisir deux points B et C de (d). **2.** Écarter le compas de la distance BC. **3.** Reporter au point A la distance BC. **4.** Écarter le compas de la distance BA. **5.** Reporter au point C la distance BA. **6.** Relier le point A et le point D.

1.2. Théorème de Thalès

Théorème 2.

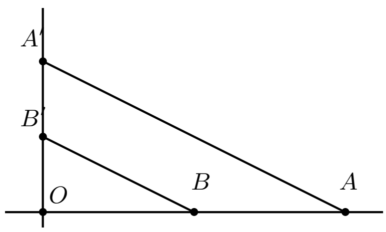
Soient O A et A' trois points non alignés. Soient $B \in (OA)$ et $B' \in (OA')$.

• Si (AA') // (BB') alors $\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{OB'}{OA'} = \dfrac{BB'}{AA'}$

• Réciproquement, si O, A, B et O, A', B' sont rangés dans le même ordre et l'une des égalités ci-dessus est vérifiée, alors les droite (AA') et (BB') sont parallèles.

Exemple 1.

Dans la figure ci-contre, (AA') // (BB') et $OA = 4$ cm, $OB = 2$ cm, $OB' = 1$ cm. En déduire OA'.

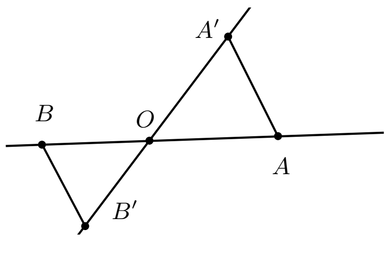


....

....

....

Dans l'exemple ci-contre, les triangles OAB et $OA'B'$ sont isocèles en O. Démontrer que (AA') et (BB') sont parallèles.



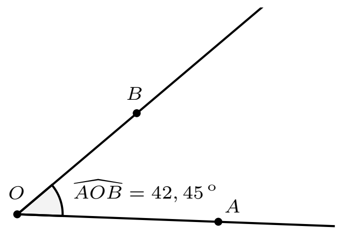
....

....

....

2. Angles

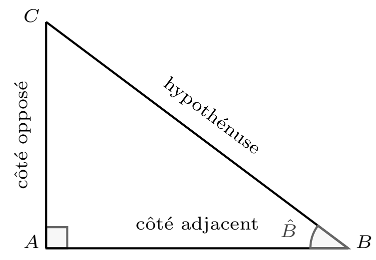
Définition 2. Un *angle* est définit par deux demi-droites (ou segments) de même origine.
L'unité de mesure d'un angle est le degré, la mesure d'un angle s'obtient à l'aide d'un rapporteur. (on verra plus tard une définition théorique de la mesure d'un angle).
On utilise souvent la même notation pour l'angle et sa mesure.



2.1. Angles et triangles

Propriété 3. La somme des mesures des angles d'un triangle est de $180\,^{\circ}$.

Définition 3. Dans un triangle rectangle en A, on définit :
$\star$ $\cos(\widehat{B}) = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$
$\star$ $\sin(\widehat{B}) = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}$
$\star$ $\tan(\widehat{B}) = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{\sin(\hat{B})}{\cos(\hat{B})}$



Propriété 4. Dans un triangle ABC rectangle en A, l'angle $\hat{B}$ est caractérisé de manière unique par son cosinus, son sinus ou sa tangente.
• On obtient le cosinus (par exemple) à partir de l'angle avec la touche $\boxed{\cos}$ de la calculatrice.
• On obtient l'angle à partir du cosinus (par exemple) avec la touche $\boxed{\cos^{-1}}$ de la calculatrice.

Exemple 2. Un triangle ABC rectangle en A vérifie $\widehat{B} = 30\,^{\circ}$ et $BC = 6$ cm. $AC = ?$

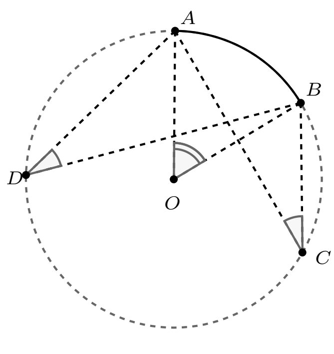
....

....

....

2.2. Angles et cercles

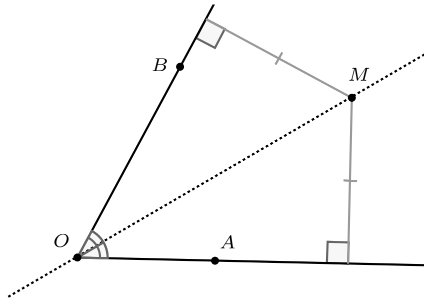
Théorème 5. (angle au centre). Soient A, B, C trois points d'un cercle de centre O. Alors $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$. (la mesure d'un angle au centre est le double de la mesure d'un angle inscrit interceptant le même arc).



Théorème 6. (angle inscrit). Soient A, B, C, D trois points d'un cercle. Alors $\widehat{ADB} = 2\widehat{ACB}$. (deux angles inscrits interceptant le même arc ont même mesure).

2.3. Bissectrices

Définition 4. La *bissectrice* d'un angle $\hat{A}$ est la demi-droite qui passe par A et partage l'angle en deux angles de même mesures.



Propriété 7. Un point M appartient à la bissectrice d'un angle si et seulement s'il est équidistant des deux demi-droites qui définissent l'angle.

3. Perpendicularité

Définition 5. Deux droites (d) et (d') sont *perpendiculaires* lorsqu'elles forment un *angle droit* (de 90 °). On l'abrège : $(d) \perp (d')$.

Propriété 8. Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles.

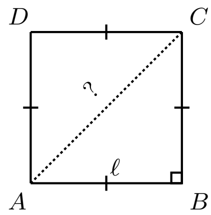
3.1. Théorème de Pythagore

Théorème 9.

Soient A, B, C trois points deux à deux distincts.
Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Exemple 3.

$ABCD$ est un carré de côtés de mesure ℓ. Exprimer AC en fonction de ℓ.

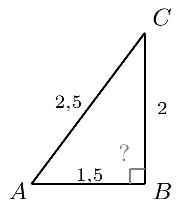


. . . .

. . . .

. . . .

Dans le triangle ABC, $AB = 1{,}5$ cm, $BC = 2$ cm et $AC = 2{,}5$ cm. Montrer que ABC est rectangle en B.

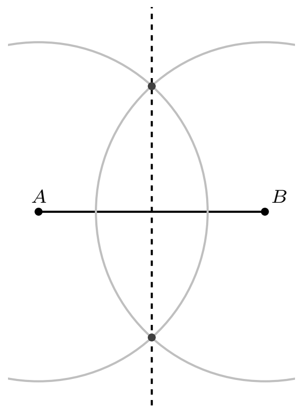


. . . .

. . . .

3.2. Médiatrice

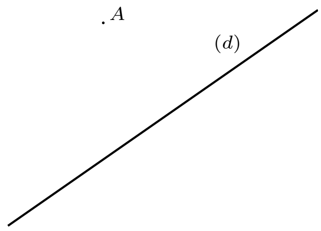
Définition 6. La *médiatrice* d'un segment est la droite qui coupe ce segment perpendiculairement en son milieu.



Propriété 10. La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants (à égale distance) des deux sommets du segment.

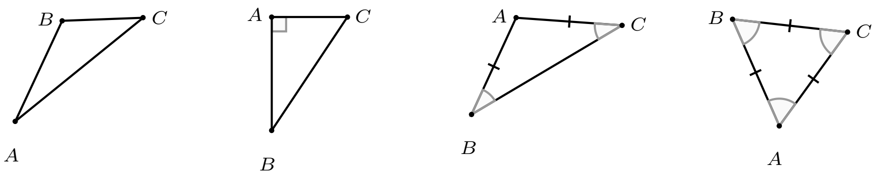
Exemple 4. Ainsi, pour construire la médiatrice d'un segment, on choisit un écartement au compas et on trace un arc de cercles à partir de chaque extrémités du segment. Les points d'intersection des arcs de cercle sont équidistants des extrémités, donc appartiennent à la médiatrice.

Exemple 5. Pour construire la droite perpendiculaire à une droite (d) passant par un point A, on trace un arc de cercle centré en A. La médiatrice du segment dont les extrémités sont les points d'intersection de l'arc de cercle avec (d) est la droite perpendiculaire à (d) passant par A.
Ainsi, toute construction à l'équerre, la règle et au compas est réalisable à la règle et au compas seulement.
Éxecuter la construction et l'expliquer.



4. Triangles

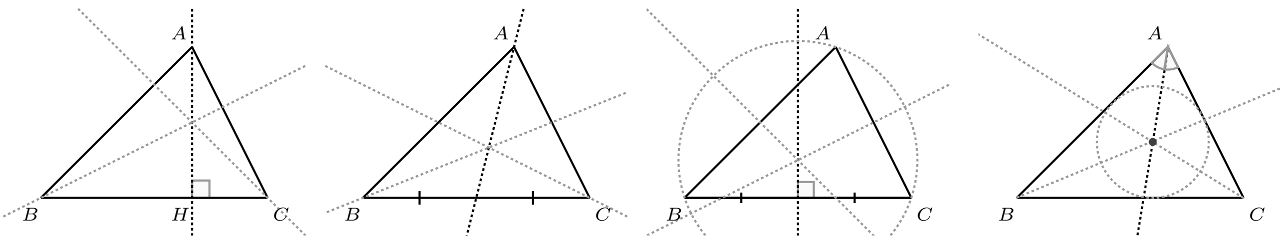
Définition 7. Un *triangle* est défini par trois points deux à deux distincts A, B, C. C'est la réunion des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Un triangle ABC est dit
- ⋆ *rectangle* en $A \iff \hat{A} = 90^o$ (le plus grand côté $[BC]$ est alors appelé *hypothénuse*)
- ⋆ *isocèle* en $A \iff AB = AC \iff \hat{B} = \hat{C}$.
- ⋆ *équilatéral* $\iff AB = AC = BC \iff \hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$.
- ⋆ *plat* $\iff A$, B et C sont alignés.



triangle — rectangle en A — isocèle en A — équilatéral

Propriété 11. La somme des angles d'un triangle est de $180\,^o$.

4.1. Droites remarquables



Hauteurs — Médianes — Médiatrices — Bissectrices

Définition 8. La *hauteur* issue de A d'un triangle ABC est la droite passant par A et perpendiculaire à (BC). Le *pied de la hauteur* issue de A est le point H d'intersection de la hauteur issue de A avec (BC). (⚠ une hauteur peu sembler « en dehors » du triangle).

Propriété 12.
• Les hauteurs d'un triangle sont *concourantes* (se coupent en un seul point). Leur point d'intersection est appelé l'*orthocentre* du triangle.
• Soit b la mesure d'un côté (base) et h est la distance du sommet opposé au pied de la hauteur issue de ce sommet (hauteur). L'aire du triangle est alors : $\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$.

Définition 9. La *médiane* issue de A d'un triangle ABC est la droite passant par A et le milieu A' du côté opposé $[BC]$.

Propriété 13. Les médianes d'un triangle ABC sont concourantes. Leur point d'intersection G est appelé *centre de gravité* du triangle ABC. On a $AG = \frac{2}{3}AA'$.

Propriété 14. Les médiatrices (définition 6) d'un triangle ABC sont concourantes. Leur point d'intersection est le *centre du cercle circonscrit* au triangle ABC. Ce cercle passe par les trois sommets du triangle.

Propriété 15. Les bissectrices (définition 4) d'un triangle ABC sont concourantes. Leur point d'intersection est le *centre du cercle inscrit* au triangle ABC (tangent aux côtés du triangle).

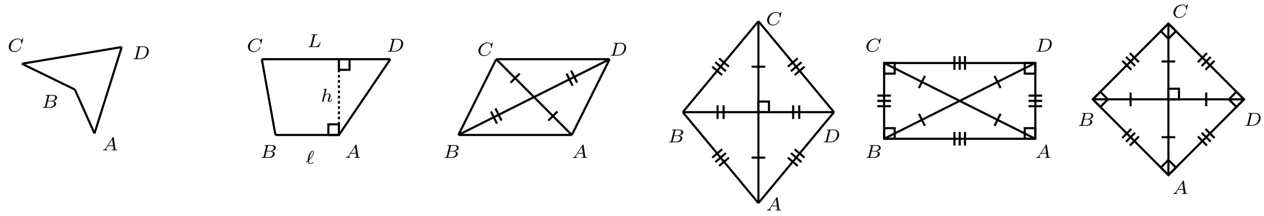
Propriété 16. Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $[BC]$ est le diamètre de son cercle circonscrit.

Propriété 17. Un triangle ABC est isocèle en A si et seulement si deux quelconques des quatre droites remarquables ci-dessus sont confondues.

5. Quadrilatères

Définition 10. Un *quadrilatère* $ABCD$ est défini par les quatre points A, B, C, D dans cet ordre. C'est la réunion des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
Les *diagonales* du quadrialtère $ABCD$ sont les segments $[AC]$ et $[BD]$.
Ses *côtés opposés* sont d'une part $[AB]$ et $[CD]$, et d'autre part $[CD]$ et $[DA]$.
On dit qu'un quadrilatère est un

- ⋆ *trapèze* si et seulement s'il a deux côtés opposés parallèles.
- ⋆ *parallélogramme* si et seulement si ses côtés opposés sont deux à deux parallèles.
- ⋆ *losange* si et seulement si tous ses côtés sont égaux.
- ⋆ *rectangle* si et seulement s'il a quatre angles droits.
- ⋆ *carré* si et seulement si c'est un losange et un rectangle.



Quadrilatère | Trapèze | Parallélogramme | Losange | Rectangle | Carré

Propriété 18. (*Trapèzes*) Dans un trapèze on note L et ℓ les longueurs des côtés parallèles et h la distance entre ces deux côtés. L'aire du trapèze est alor : $\mathcal{A} = \frac{L+\ell}{2}$.

Propriété 19. (*Parallélogrammes*). Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leurs milieux.

Si ℓ est la longueur d'un côté du parallélogramme et h la distance de ce côté à son côté opposé, l'aire du parallélogramme est $\mathcal{A} = h \times \ell$.

Propriété 20. (*Losanges*) Un quadrilatère est un losange si et seulement si

- ⋆ c'est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de mêmes longueurs.
- ⋆ ses diagonales se coupent perpendiculairement en leurs milieux.

Propriété 21. (*Rectangles*). Un quadrilatère est un rectangle si et seulement si

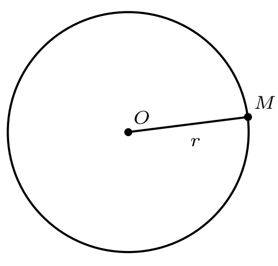
- ⋆ c'est un parallélogramme avec un angle droit.
- ⋆ il a trois angles droits.
- ⋆ ses diagonales sont de mêmes longueurs et se coupent en leurs milieux.

Si ℓ est la largeur d'un rectangle et L sa longueur, l'aire du rectangle est $\mathcal{A} = L \times \ell$.

6. Cercles

Définition 11. Le *cercle* de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M tels que $OM = r$. Un *diamètre* du cercle est un segment dont les extrémités sont sur le cercle et dont le milieu est le centre du cercle.

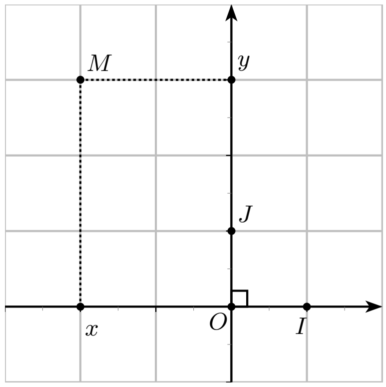
Propriété 22. Le périmètre d'un cercle de rayon r est $p = 2\pi r$.
L'aire d'un *disque* (« un cercle plein ») de rayon r est $\mathcal{A} = \pi r^2$.



7. Repérage dans le plan

Définition 12. Un *repère* est la donnée de trois points non alignés $(O : I, J)$ du plan.
- ⋆ Le point O désigne l'*origine* du repère.
- ⋆ La droite (OI) est l'axe des *abscisses*. L'unité en abscisse est la longueur OI.
- ⋆ La droite (OJ) est l'axe des *ordonnées*. L'unité en ordonnée est la longueur OJ.
- ⋆ Le repère $(O; I, J)$ est dit *orthonormé* lorsque $OI = OJ$ et $\widehat{IOJ} = 90\,°$.

Définition 13. Tout point M du plan est repréré de manière unique par un couple de *coordonnées* $(x; y)$.
- ⋆ Le point d'intersection de la parallèle à (OJ) passant par M avec (OI) définit le réel x sur la droite graduée (OI).
- ⋆ Le point d'intersection de la parallèle à (OI) passant par M avec (OJ) définit le réel y sur la droite graduée (OJ).



Exemple 6. Placer dans le repère représenté ci-dessus les points $B(1; 2)$, $C(-1; 0)$ et $D(0; 4)$.
Quelles sont les coordonnées de M ? . . . .

Propriété 23.

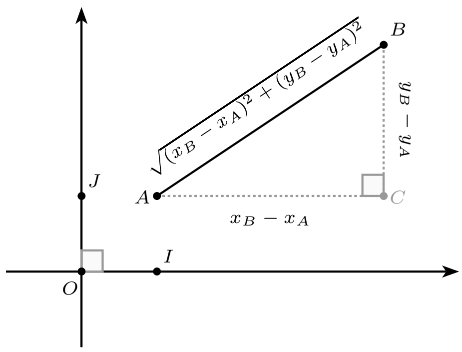
Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$, soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Alors le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées

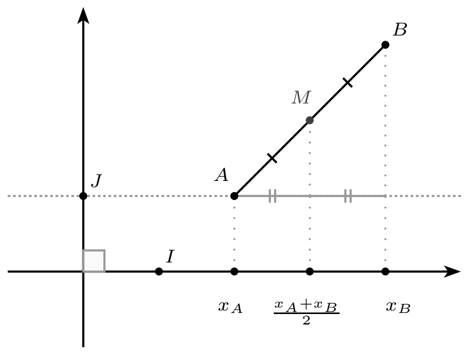
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Si le repère est orthonormé, la distance AB est donnée par

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Idée. La formule des distances se démontre par le théorème de Pythagore, et la formule du milieu vient du théorème de milieux (cas particulier du théorème de Thalès) :





Exemple 7. Déterminer les coordonnées du milieu K de $[MB]$ et L de $[CD]$. . . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Exemple 8. Calculer les distances suivantes :
$OM =$ . . . .
$MB =$ . . . .