CHAPITRE 1 : CALCUL ALGÉBRIQUE -07-09-12-
Seconde 5, 2012-2013, Y. Angeli

1. Nombres entiers naturels

> **Définition 1.** L'ensemble des *entiers naturels*, noté $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots; 17; 18; \ldots\}$, est l'ensemble des nombres (positifs) qui permettent de compter (ou dénombrer) une collection d'objets.

Exemple 1. La notation « $x \in A$ » signifie que l'élément x *appartient* à l'ensemble A.
Compléter par $\in$ ou $\notin$:

$$1\,527 \ldots \mathbb{N} \qquad -3 \ldots \mathbb{N} \qquad 0 \ldots \mathbb{N} \qquad \pi \ldots \mathbb{N} \qquad \frac{3}{4} \ldots \mathbb{N} \qquad 2^7 \ldots \mathbb{N} \qquad \frac{9}{3} \ldots \mathbb{N}$$

1.1. Notions d'arithmétique

> **Définition 2.** Soient $n, d \in \mathbb{N}$. (c'est-à-dire n et d deux nombres entiers naturels.
> • on dit que d *divise* n lorsqu'il existe un entier naturel q tel que $n = d \times q$. (on dit encore que d est un *diviseur* de n ou que n est un *multiple* de d)
> • Un entier naturel $p \geqslant 2$ est un *nombre premier* lorsque ses seuls diviseurs sont 1 et p.

Exemple 2. ✎ Compléter par V (vrai) ou F (faux) :

• 3 divise 72 …	• 19 est un nombre premier …	• 63 est multiple de 7 …
• 5 divise 1 234 560 …	• 91 est un nombre premier …	• 703 un multiple de 7 …

Citer 6 nombres premiers : ……………………………………………………

Lister les diviseurs de 24 : ……………………………………………………

Écrire 72 comme un produit de nombres premiers : ……………………………………

Propriété 1.

Critères de divisiblité. Un entier naturel est divisible par …
⋆ 2 si et seulement si son chiffre des unités est divisible par 2.
⋆ 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
⋆ 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divivisble par 4.
⋆ 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5.
⋆ 6 si et seulement s'il est divisible par 2 et par 3.
⋆ 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
⋆ 10^n si et seulement s'il se termine par n chiffres 0. (où $n \in \mathbb{N}$)

Exemple 3. ✎ Soit c un chiffre entre 0 et 9. Le nombre $12\,345\,67c$ est divisible par

• 2 si et seulement si ……………………	• 3 si et seulement si ……………………
• 4 si et seulement si ……………………	• 5 si et seulement si ……………………
• 6 si et seulement si ……………………	• 9 si et seulement si ……………………

Un nombre divisible par 2 et 4 est-il toujours divisible par 8 ? ……………………………

2. Ensembles de nombres

2.1. Nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$

Définition 3. L'ensemble des *nombres entiers relatifs* est $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$. Il est composé des nombres entiers naturels et de leurs opposés.
En particulier, l'ensemble $\mathbb{N}$ est *contenu* (ou inclus) dans $\mathbb{Z}$, ce que l'on note « $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ».

Exemple 4. Vrai ou Faux ?

• si $n \in \mathbb{N}$ alors $n \in \mathbb{Z}$	...	• si $n \in \mathbb{N}$ alors $-n \in \mathbb{Z}$	...	$0 \in \mathbb{Z}$	...
• si $n \in \mathbb{Z}$ alors $-n \in \mathbb{N}$	...	• si $n \in \mathbb{N}$ alors $-n \notin \mathbb{N}$	...	$-3,5 \in \mathbb{Z}$	...

2.2. Nombres décimaux

Définition 4. L'ensemble des *nombres décimaux* est

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{n}{10^k} \text{ où } n \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ce sont les nombres dont l'écriture décimale n'a qu'un nombre *fini* de chiffres après la virgule.

Exemple 5. En utilisant la définition, justifier que les nombres suivants sont décimaux :

$2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $3{,}456 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $\dfrac{2}{5} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$:

$-12{,}5 \dots \mathbb{D}$ $\quad \dfrac{3}{4} \dots \mathbb{D}$ $\quad \dfrac{2}{3} \dots \mathbb{D}$ $\quad \mathbb{Z} \dots \mathbb{D}$ $\quad \mathbb{D} \dots \mathbb{N}$ $\quad 7^{-1} \dots \mathbb{D}$ $\quad 0{,}3333 \dots \mathbb{D}$

2.3. Nombres rationnels

Définition 5. L'ensemble des *nombres rationnels* est

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{d} \text{ où } n \in \mathbb{Z},\ d \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}.$$

C'est l'ensemble des nombres qui s'écrivent comme le quotient de deux entiers.
• La fraction $\frac{n}{d}$ est le rapport du *numérateur* n (en haut) et du *dénominateur* $d \neq 0$ (en bas).
• La fraction $\frac{n}{d}$ est dite *irréductible* lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de facteurs communs (autres que 1 ou -1).
⚠ la division par 0 est **interdite** : $\frac{n}{0}$ n'a aucun sens.

Propriété 2. Soit $q \in \mathbb{Q}$ un nombre rationnel. On a l'alternative suivante :
⋆ soit sa partie décimale est finie, dans ce cas c'est un nombre décimal ($q \in \mathbb{D}$).
⋆ soit sa partie décimale est infinie et périodique à partir d'un certain rang et $q \notin \mathbb{D}$.

Notation 1. Pour désigner une période de la partie décimale, on la souligne :

$\dfrac{5}{37} = 0,135\,135\,135\cdots = 0,\underline{135}$ $\qquad \dfrac{2}{3} = \dots\dots\dots\dots\dots$ $\qquad 0,\underline{27} = \dots\dots\dots\dots\dots$

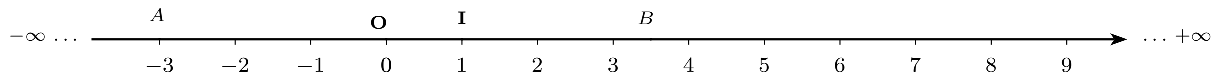
Propriété 3. Un nombre rationnel est un nombre décimal si et seulement si dans son écriture sous forme de fraction irréductible, le dénominateur n'a que des facteurs 2 ou 5.

Exemple 6. En simplifiant ces fractions, dire si ce sont des nombres décimaux ou pas :

$\dfrac{3 \times 5 \times 7 \times 12}{10 \times 14 \times 3 \times 20} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $\qquad \dfrac{3 \times 5 \times 7 \times 12}{10 \times 14 \times 9 \times 20} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

2.4. Nombres réels

Définition 6. • L'ensemble $\mathbb{R}$ des *nombres réels* est composés des nombres qui permettent de mesurer des longueurs, et de leurs opposés.
• Un nombre réel qui n'est pas un nombre rationnel est dit *irrationnel*. ($x \in \mathbb{R}$ et $x \notin \mathbb{Q}$).
• La *droite numérique*, ou repère $(O; I)$, est une droite munie de deux points : une origine O et une unité I. À tout réel x correspond alors un unique point M de la droite, d'abscisse x.



Exemple 7. On a représenté sur la droite numérique ci-dessus les points A et B d'abscisses respectives -3 et 3,5. Représenter $C(\sqrt{2})$, $D(-\frac{11}{4})$ et $E(\frac{10}{3})$.

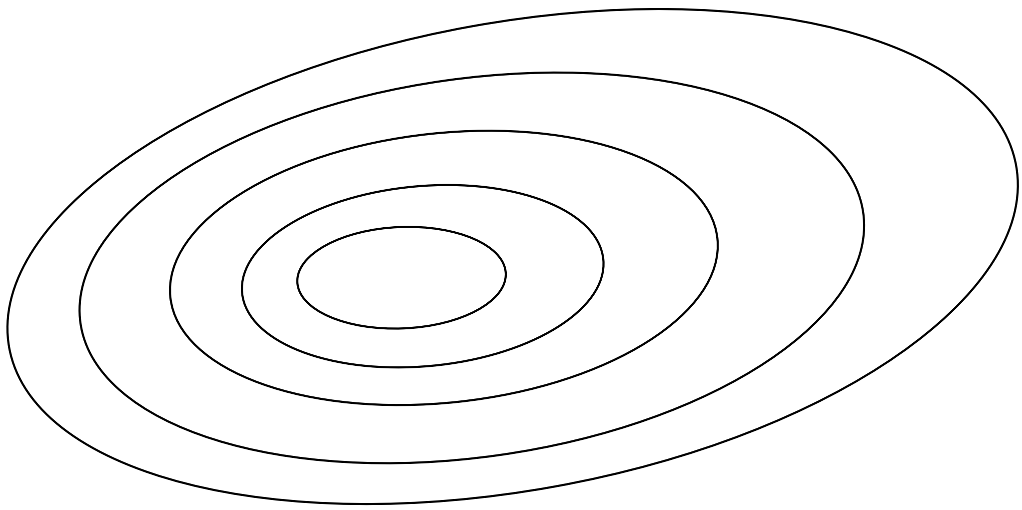
Donner des exemples de nombres irrationnels : ....

Que dire d'un réel dont l'écriture décimale est finie ? ....

2.5. Inclusions

Propriété 4. On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemple 8. Illustrer cette propriété en complétant le schéma suivant (nommer chaque ensemble et placer des nombres à titre d'exemples) :



Définition 7. Déterminer la nature d'un nombre, c'est trouver le plus petit de ces ensembles auquel il appartient.

Exemple 9. Simplifier puis déterminer la nature de :

① $\dfrac{-18}{4} =$

② $0,2727 =$

③ $\dfrac{12}{\sqrt{9}} =$

④ $\dfrac{17}{15} =$

⑤ $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{48}} =$

3. Transformer une égalité

Propriété 5.

On transforme une égalité en une égalité équivalente en :
⋆ ajoutant à chacun des membres le même terme : $a = b \iff a+\mathbf{c} = b+\mathbf{c}$
⋆ multipliant chacun des membres par le même facteur non nul. $a = b \iff a\times\mathbf{c} = b\times\mathbf{c}$.
⋆ simplifiant l'un des deux membres : si $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ alors on a : $a = \mathbf{b} \iff a = \mathbf{c}$.

Exemple 10. Résoudre l'équation $2x - 5 = 3$ ....

....

....

3.1. Développer

Développer une expression algébrique, c'est la réécrire sous la forme d'une somme (ou d'une différence) de plusieurs *termes*. On utilise pour cela la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \qquad (a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemple 11. Développer : $3(2x + 1)(1 - x) =$ ....

3.2. Identités remarquables

Propriété 6.

Pour tous nombres réels a et b, on a :

① $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ② $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ ③ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Preuve. Pour tous les nombres a et b, on a :
$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.
$(a - b)^2 =$ ....
$(a + b)(a - b) =$ .... □

3.3. Factoriser

Factoriser une expression algébrique, c'est la réécrire sous forme d'un produit de plusieurs *facteurs*. C'est le contraire du développement.

⚠ un terme isolé peut toujours s'écrire comme un produit : $a = 1 \times a$, ou $-a = -1 \times a$.

⚠ si aucun facteur commun n'est détecté, penser aux identités remarquables !

Exemple 12. ✎ . $x(3+x)-x-3 = x\times\underline{(3+x)}-1\times\underline{(3+x)} = [x-1]\times\underline{(3+x)} = (x-1)(3+x)$.

Factoriser : $(x + 1)(x + 2) + 2x + 4$ ....

$32 - 2x^2 =$ ....

$x^2 + 2x + 1 =$ ....

4. Calcul avec des fractions

4.1. Simplifier une fraction

Une fraction est dite *irréductible* lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas de facteurs communs (autres que 1 et -1). On cherchera toujours à écrire les fractions sous forme irréductible, en utilisant :

Propriété 7.

① $\dfrac{a}{1} = a$	Une fraction dont le dénominateur vaut 1 est égale à son numérateur.
② $\dfrac{a\times\mathbf{c}}{b\times\mathbf{c}} = \dfrac{a}{b}$	On ne change pas une fraction en multipliant ou en divisant son numérateur et son dénominateur par un même nombre.
③ $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$	Un signe moins en facteur de la fraction peut passer en facteur du numérateur ou du dénominateur.

⚠ $\frac{x}{x-1}$ n'est pas simplifiable : on ne peut éliminer que les **facteurs** communs au numérateur et au dénominateur !

Exemple 13. Simplifier : $\dfrac{324}{18} =$ .... $\dfrac{12}{-21} =$ ....

$\dfrac{2x+2}{2x} =$ ....

4.2. Opérations sur les fractions

On note que pour les trois dernières opérations de la propriété 8, on doit impérativement mettre les deux fractions au même dénominateur : on utilise pour cela le point ② de la propriété 7 Chercher un multiple commun à deux dénominateurs est une application des notions d'arithmétiques du paragraphe 1.1.

Propriété 8.

① produit : $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a\times c}{a\times d}$ ② inverse : $\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$ ③ division : $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$

⚠ On ne peut ajouter, soustraire ou comparer que des fractions de **même** dénominateur :

④ plus : $\dfrac{a}{d} + \dfrac{b}{d} = \dfrac{a+b}{d}$ ⑤ moins : $\dfrac{a}{d} - \dfrac{b}{d} = \dfrac{a-b}{d}$ ⑥ comparer : $\dfrac{a}{d} < \dfrac{b}{d} \iff a < b$

Exemple 14. ✎ . $\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{12} - 2 =$ ....

Résoudre $\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}$ ....

....

....

Remarque 1. Pour mettre un résultat sous forme de fraction irréductible à la calculatrice, aller dans le menu $\boxed{\text{MATHS}}$, option 1 : « Frac » puis valider en tapant $\boxed{\text{ENTRÉE}}$.

✎ Vérifier à la calculatrice le premier calcul effectué précédement.

5. Calculer avec des puissances

5.1. Puissances

Définition 8. Soit $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $n \geqslant 2$ un entier.
On pose : $a^0 = 1$, $a^1 = a$ et $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$. On pose également : $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
Dans l'écriture a^n, n est appelé l'*exposant*.

En conséquence de cette définition, on a les propriétés de calcul suivtantes :

Propriété 9.

Opérations avec un même nombre élevé à différentes puissances :

① $a^n a^m = a^{n+m}$ ② $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ ③ $(a^n)^m = a^{nm}$

Opérations avec des nombres différents élevés à la même puissance :

④ $a^n \times b^n = (ab)^n$ ⑤ $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

⚠ En général, $(a+b)^n \neq a^n+b^n$. (pour $n = 2$; on a l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$, pour n plus grand développer le produit des n facteurs).

Exemple 15. Simplifier $\dfrac{3^{10} \times 2^{10}}{6^6 \times 6^{-1}} =$ ....

....

....

5.2. Racines carrées

Définition 9. La racine carrée $\sqrt{x}$ d'un nombre réel x **positif** est l'unique réel positif tel que $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$ ou encore $\sqrt{x}^2 = x$.

En conséquence, on a :

Propriété 10.

Pour tous a, b réels positifs,

① $\sqrt{a}^2 = a$ ② $\sqrt{a^2} = a$ ③ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ④ $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

⋆ Par exemple $\sqrt{60} = \sqrt{4 \times 15} = \sqrt{4} \times \sqrt{15} = 2\sqrt{15}$.
⚠ En général $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$! (on ne simplifie pas $\sqrt{2} + \sqrt{3}$)
Exemple 16. ✎ Résoudre $\sqrt{3}\,x + \sqrt{12} = \sqrt{27}$ ....

....

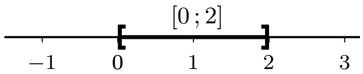
....

6. Intervalles et inéquations

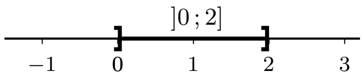
Un intervalle est un ensemble de nombres réels délimité par une ou deux valeurs. La notion d'intervalle sera par exemple utile pour désigner l'ensemble des solutions d'une inéquation.

Définition 10. Intervalles : soient $a < b$ deux nombres réels.

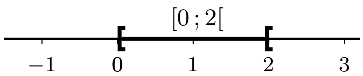
L'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ est l'intervalle $[a\,;b]$:



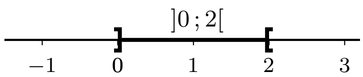
L'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a < x \leqslant b$ est l'intervalle $]a\,;b]$:



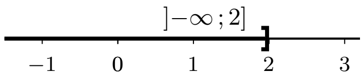
L'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x < b$ est l'intervalle $[a\,;b[$:



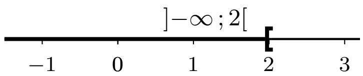
L'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a < x < b$ est l'intervalle $]a\,;b[$:



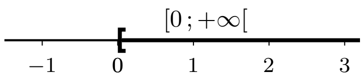
L'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \leqslant b$ est l'intervalle $]-\infty\,;b]$:



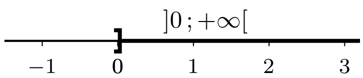
L'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x < b$ est l'intervalle $]-\infty\,;b[$:



L'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x$ est l'intervalle $[a\,;+\infty[$:



L'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a < x$ est l'intervalle $]a\,;+\infty[$:



6.1. Inéquations

Propriété 11.

- ⋆ ajouter un même nombre réel (positif ou négatif) à chaque membre d'une inégalité la transforme en une inégalité équivalente.
- ⋆ multiplier par même nombre réel strictement positif chaque membre d'une inégalité la transforme en une inégalité équivalente.
- ⋆ multiplier par même nombre réel strictement négatif chaque membre d'une inégalité et **changer son sens** la transforme en une inégalité équivalente.

Exemple 17. Déterminer l'ensemble S_1 des solutions de l'inéquation $1 - 2x \geqslant 0$: ....

....

....

Déterminer l'ensemble S_2 des solutions de l'inéquation $3x - 6 > 0$: ....

....

....

Compléter par l'un des symboles : $\in, \notin$.

$1{,}22 \;\ldots\; [1{,}3\,;+\infty[\;;\qquad -\dfrac{1}{3} \;\ldots\; \left]-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right[\;;\qquad 0{,}2 \;\ldots\; \left]\dfrac{1}{5}\,;2\right[\;;\qquad \sqrt{2} \;\ldots\;]1{,}41\,;1{,}42[$