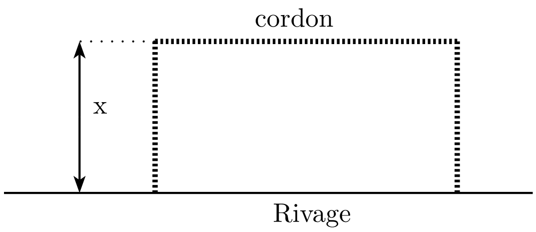
CONTRÔLE 13 : FONCTIONS DE RÉFÉRENCE -11-05-12-
Seconde 2, 2011-2012, Y. Angeli

Un maître nageur dispose d'un cordon flottant de ℓ mètres de long (ligne brisée en pointillés) pour délimiter un rectangle de baignade surveillée. On note $S(x)$ la surface en mètres carrés du rectangle de baignade en fonction de la largeur x en mètres représentée sur la figure :



PARTIE A.

1. La largeur du rectangle de baignade est x ; exprimer sa longueur en fonction de ℓ et x.
2. En déduire que S est définie pour $x \in [0, \ell/2]$, et que $S(x) = x(\ell - 2x)$.
3. Résoudre l'équation $S(x) = 0$. (une solution sera exprimée en fonction de ℓ)
4. On a représenté au dos la fonction S. Résoudre graphiquement $S(x) = 0$.
5. Déduire la longueur ℓ du cordon des deux questions précédentes.

PARTIE B.

À partir de la partie B, on admet que $S : [0, 180] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x(360 - 2x)$.
Le maître nageur souhaite un rectangle de baignade d'au moins $9\,000\ m^2$.

1. Graphiquement, conjecturer pour quels x la surface du rectangle est d'au moins $9\,000\ m^2$.
2. Démontrer que pour tout $x \in [0, 180]$, $S(x) - 9\,000 = 2(150 - x)(x - 30)$.
3. En déduire le tableau de signes de $S(x) - 9\,000$.
4. Prouver la conjecture émise au début de la partie B.

PARTIE C.

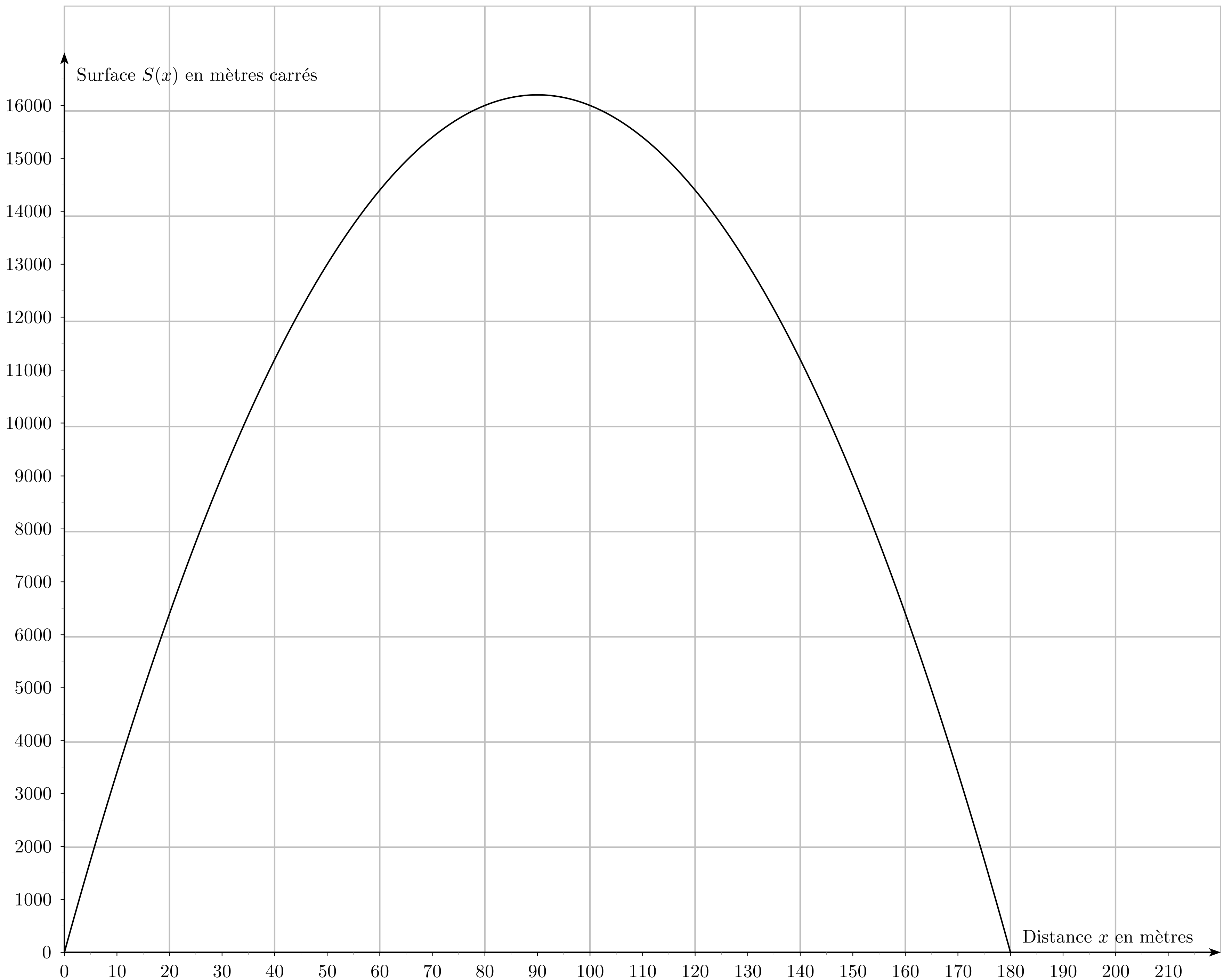
1. Donner le nom de la courbe représentative de S, puis une équation de son axe de symétrie.
2. Déterminer graphiquement le tableau de variations complet de S. En déduire la surface maximale du rectangle.
3. Démontrer que pour tout $x \in [0, 180]$, $S(x) = 16\,200 - 2(x - 90)^2$.
4. Démontrer que S est strictement croissante sur l'intervalle $[0, 90]$. Expliquer comment déduire le reste du tableau à partir de la question $C.1$.

PARTIE D.

Pour des questions de sécurité, le maître nageur veut limiter la surface de la zone de baignade à $16\,000\ m^2$ au plus.

1. Calculer $S(80)$ et $S(100)$.
2. Par lecture graphique, résoudre l'inéquation $S(x) \leq 16\,000$.
3. Comment le maître nageur doit-il choisir x pour que $9\,000 \leq S(x) \leq 16\,000$?

Bonus. Quelle forme, autre que le rectangle permettrait d'obtenir une surface de baignade plus importante encore ? Préciser autant que possible.


Surface $S(x)$ en mètres carrés
16000
15000
14000
13000
12000
11000
10000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
Distance x en mètres
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
210